**9/2** (2011), 193–208
tmcs@math.klte.hu
http://tmcs.math.klte.hu

**Teaching Mathematics and Computer Science**

# Über die sogenannte Regel von de l'Hospital im Mathematikunterricht

Sándor Kovács

*Abstract.* The aim of this paper is to provide an insight into the problems of the so-called indeterminate expressions, in order to make the students understand them better. The paper deals with the conditions and the proof of the theorem about the limit of a quotient of certain functions of one variable, usually named after l'Hospital. The question is of some interest, since the formulation of the result in several textbooks often appears redundant and the proof is more complex than necessary. First, the historical background is briefly sketched. Second, the theorem is formulated and justified, where three different, simple proof techniques are presented. Finally, possible applications are suggested for teaching, which are usually not treated in this problem area.

*Key words and phrases:* Limes, Ableitung, diskret, Potenzreihe.

*ZDM Subject Classification:* B40, I40.

## 1. Einführung

Eines der wirksamster Mittel zur Berechnung des Grenzwerts eines Quotienten reeller Funktionen einer Variablen ist das vor 314 Jahren, also im Jahre 1696 durch l'Hospital[1] in seinem Buch[2] *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*[3] veröffentlichte Resultat, womit er sich dauerhaften mathematischen Ruhm sicherte.

[1] Gaullaume François Antoine Marqies de l'Hospital (1661 – 1704)
[2] Dies war der erste Lehrbuch der Differentialrechnung.
[3] Analyse des unendlich Kleinen zur Untersuchung gekrümmter Linien

Wie schon seit fast hundert Jahren bekannt, hatte l'Hospital dieses Resultat nicht selbst entdeckt, sondern von Bernoulli[4] übernommen. Die beiden schlossen unter dem Siegel der Verschwiegenheit ein Abkommen, wonach Bernoulli gegen ansehnliche Geldzuwendungen dem vermögenden Feudalherrn (und nur ihm) seine neusten mathematischen Entdeckungen mitteilen würde[5]. Dieser Vertrag machte Bernoulli nicht nur zu einem Angestellten l'Hospitals, sondern er erschwerte es ihm eigene Arbeiten zu veröffentlichen. Das Erscheinen des Buches ärgerte ihn, denn l'Hospital hat den größten Teil des Buches aus Bernoullis Aufzeichnungen und Briefen zusammengestellt. Öffentlich konnte Bernoulli aber l'Hospital nicht angreifen, lediglich in Briefen an Huygens[6] und Leibniz[7] tat er seinen Zorn und Kummer kund. Später, nach dem Tod von l'Hospital, hat er Anspruch auf die von l'Hospital dort mitgeteilte und nach ihm benannte berühmte Regel erhoben. Er fand aber bei den meisten kein Gehör bzw. keine Zustimmung. Nicht einmal die Historiker gaben auf das Wort von Bernoulli – vermutlich infolge seiner mehrfach gezeigten Eitelkeit und Prahlerei bzw. wegen der Verwicklung in Prioritätsstreitereien mit aller Welt. Auf Grund der Angriffe gegen l'Hospital und der Veröffentlichung eines Lehrbuchs zur Integralrechnung[8] wurde vermutet, daß Bernoulli auch ein Lehrbuch zur Differentialrechnung geschrieben habe. Aber erst 1922 konnte ein solches Manuskript[9] als eine Abschrift der Ausarbeitung von Bernoulli in der Baseler Universitätsbibliothek gefunden werden, die sein Neffe[10] angefertigt hatte. Diese Ausarbeitung ist mit dem Buch l'Hospitals praktisch identisch, wenn auch l'Hospital einige Fehler Bernoullis korrigierte, wie z. B. die fehlerhafte Meinung, das Integral von $1/x$ sei endlich.

Man kann – mehrere, heute gebräuliche Lehrbücher aufschlagend – verschiedene ≪Varianten≫ der Regel von Bernoulli-l'Hospital finden, was ihre Vorasussetzungen betrifft. Wir werden sie im nächsten Paragraphen mit ihren minimalsten Voraussetzungen formulieren und für sie mehrere Beweismethoden zeigen. Weiterhin analysieren wir mögliche Verallgemeinerungen und Anwendungsmöglichkeiten, die im Mathematikunterricht mit Erfolg eingesetzt werden könnten.

[4] Johann (I) Bernoulli (1667 – 1748).

[5] Als Gegenleistung erhielt Bernoulli eine lebenslange jährliche Pension in Höhe eines halben Professorengehalts.

[6] Christiaan Huygens (1629 – 1695), niederländischer Physiker, Mathematiker und Astronom.

[7] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716)

[8] Lectiones mathematicae de methodo integralium (1691/92)

[9] *Johanis Bernoullii Lectiones de calculo differentialium*

[10] Nicolaus (I) Bernoulli (1687 – 1759)

## 2. Die Regel von Bernoulli-l'Hospital

Die Bestimmung des Grenzwerts $\lim_a(f/g)$ kann erhebliche Schwierigkeiten bereiten, wenn Zähler und Nenner für $x \to a$ gegen 0 streben. Sie ist jedoch völlig mühelos, wenn zusätzlich $f$ und $g$ in $a$ differenzierbar sind und $g'(a) \neq 0$ ist. In diesem Falle ist, infolge der Stetigkeit von $f$ und $g$, $f(a) = g(a) = 0$, und somit strebt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} \longrightarrow \frac{f'(a)}{g'(a)} \quad \text{für} \quad x \to a. \tag{1}$$

Eine weitreichende Verallgemeinerung dieser einfachen Tatsache bringt der

Satz 1. *Es seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$: $a < b$ und $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ $(x \in (a,b))$. Ferner treffe eine der folgenden Annahmen zu:*

*(A1)* $\lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = 0,$ *(A2)* $\lim\limits_{a+0} g = +\infty$ *oder* $\lim\limits_{a+0} g = -\infty.$

*Man nehme weiterhin an, daß der Limes $L := \lim\limits_{a+0}(f'/g')$ im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne existiert, also $L \in \overline{\mathbb{R}}$ ist. Dann gilt $\lim\limits_{a+0}(f/g) = L$. Eine analoge Aussage kann für Grenzwerte in $b-0$ formuliert werden.*

Beweis. Als Ausgangspunkt dient der Mittelwertsatz von Cauchy[11] (vgl. [6]).

*1. Schritt.* Zunächst sei $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Man wähle ein $q \in \mathbb{R}$ mit $L < q$ und ein $r \in \mathbb{R}$ mit $L < r < q$. Dann existiert infolge von $\lim\limits_{a+0}(f'/g') = L$ ein $c \in (a,b)$ mit der Eigenschaft

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < r \quad (x \in (a,c)). \tag{2}$$

Zu zwei verschiedenen Punkten $x, y \in (a,c)$ gibt es nach dem Mittelwertsatz von Cauchy eine Stelle $\xi$ zwischen $x$ und $y$, für die

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \tag{3}$$

[11]Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857), französischer Mathematiker

gilt (wegen der Forderung $g'(x) \neq 0$ $(x \in (a,b))$ sind beide Nenner ungleich Null (vgl. Satz von Rolle[12])). Mit (2) erhält man daraus

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} < r < q \quad (x, y \in (a,c)). \tag{4}$$

Gilt nun (A1), so folgt aus (4) für $x \to a$

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leq r < q \quad (y \in (a,c)). \tag{5}$$

Gilt jedoch (A2), so bestimme man zu einem festen $y \in (a,c)$ ein $d \in (a,y)$, so daß

$$g(x) > \max\{0, g(y)\} \quad \text{bzw.} \quad g(x) < \min\{0, g(y)\} \quad (x \in (a,d))$$

bleibt, je nachdem $\lim\limits_{a+0} g = +\infty$ oder $\lim\limits_{a+0} g = -\infty$ ist. In jedem Falle ist dann

$$\frac{g(x)-g(y)}{g(x)} > 0 \quad (x \in (a,d)).$$

Aus (4) folgt durch Multiplikation mit dem für $x \in (a,d)$ positiven $[g(x) - g(y)]/g(x)$:

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)} < r \cdot \frac{g(x)-g(y)}{g(x)} \qquad (x \in (a,d))$$

also auch

$$\frac{f(x)}{g(x)} < r - r \cdot \frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \quad (x \in (a,d)).$$

Wegen

$$\lim_{x \to a+0} \frac{g(y)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f(y)}{g(x)} = 0$$

($y$ ist fest gewählt) gibt es ein $w \in (a,d)$, so dass

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq r < q \quad (x \in (a,w)) \tag{6}$$

ist. Wir fassen die zwei Ungleichungen (5) und (6) zusammen: Unter jeder der Annahmen (A1) und (A2) gibt es zu jedem $q > L$ ein $x_q > a$, so dass

$$\frac{f(t)}{g(t)} < q \quad (t \in (a, x_q)) \tag{7}$$

ist.

[12]Michel Rolle (1652 – 1719), französischer Mathematiker

*2. Schritt.* Nun sei $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Analog, wie im ersten Beweisteil, gibt es zu jedem $p < L$ ein $x_p > a$, so dass

$$p < \frac{f(t)}{g(t)} \quad (t \in (a, x_p)) \tag{8}$$

ist.

*3. Schritt.* Aus (7) und (8) folgt nun ganz leicht die Behauptung des Satzes (gleichgültig ob $L$ endlich oder unendlich ist): denn der Fall $L = -\infty$ bzw. $L = +\infty$ wird bereits durch (7) und (8) erledigt; ist jedoch $L \in \mathbb{R}$, so gibt es – wenn man die genannten Abschätzungen kombiniert – zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x > a$, so dass

$$L - \varepsilon < \frac{f(t)}{g(t)} < L + \varepsilon \quad (t \in (a, x)),$$

also $\lim\limits_{a+0}(f/g) = L$ ist. □

## 3. Anmerkungen zu den Voraussetzungen und dem Beweis der Regel

In vielen Werken wird bezüglich (A1) bzw. (A2) $g(x) \neq 0$ $(x \in (a, b))$ bzw. $\lim\limits_{a+0} f = +\infty (= -\infty)$ vorausgesetzt. Wegen der Forderung $g'(x) \neq 0$ $(x \in (a, b))$ folgt die erste Voraussetzung aus dem Satz von Darboux[13], denn $g'$ ist in diesem Falle entweder positiv oder negativ, $g$ ist also streng monoton, und dies mit $\lim\limits_{a+0} g = 0$ impliziert, daß $g(x) \neq 0$ $(x \in (a, b))$ ist. Die letztere Voraussetzung – wie aus dem Beweis ersichtlich – ist einfach überflüssig. Man beachte, daß durch Weglassen der Bedingung $\lim\limits_{a+0} f = +\infty (= -\infty)$ die folgenden Fälle auftreten können. Gilt $\lim\limits_{a+0} f \in \mathbb{R}$, so ist $f$ lokal beschränkt, was $\lim\limits_{a+0} f/g = 0$ zur Folge hat. Ist $L \neq 0$, so folgt für $f$ die Limesrelation $\lim\limits_{a+0} f = +\infty (= -\infty)$ (vgl. [7]). Es darf also auch der Fall vorkommen, wo $f$ in $a + 0$ keinen Grenzwert hat:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\sin(x)}{2x} = 0, \quad \text{obwohl} \quad \lim_{+\infty} \cos \quad \text{nicht existiert.}$$

Die Forderung $g'(x) \neq 0$ $(x \in (a, b))$ wurde bei dem Beweis mehr oder weniger ausgenutzt. Es ist also kein Wunder, daß $\lim\limits_{+\infty}(f/g)$ für die Funktionen (vgl. [10])

$$f(x) := x + \sin(x)\cos(x), \quad g(x) := f(x)e^{\sin(x)} \quad (x \in \mathbb{R})$$

[13] Jean Gaston Darboux (1842 – 1917), französischer Mathematiker

nicht vorhanden ist, obwohl

$$\lim_{+\infty} \frac{f'}{g'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\cos(x)e^{-\sin(x)}}{x + \sin(x)\cos(x) + 2\cos(x)}$$

existiert und gleich 0 ist. $g'$ nimmt nämlich den Wert 0 unendlich oft an:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos(x)e^{\sin(x)}(x + \sin(x)\cos(x)) + e^{\sin(x)}(1 + \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ &= e^{\sin(x)}\left[x\cos(x) + \sin(x)\cos^2(x) + 1 + \cos^2(x) - \sin^2(x)\right] \\ &= e^{\sin(x)}\left[x\cos(x) + \sin(x)\cos^2(x) + 2\cos^2(x)\right] \\ &= e^{\sin(x)}\cos(x)\left[x + \sin(x)\cos(x) + 2\cos(x)\right] \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

(s. Abb. 1 bzw. Abb. 2).

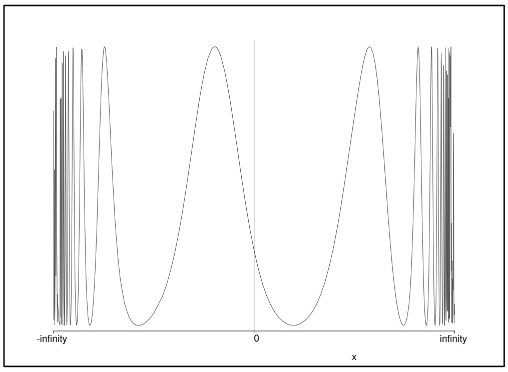


*Abbildung 1.* Der Graph von $f/g$

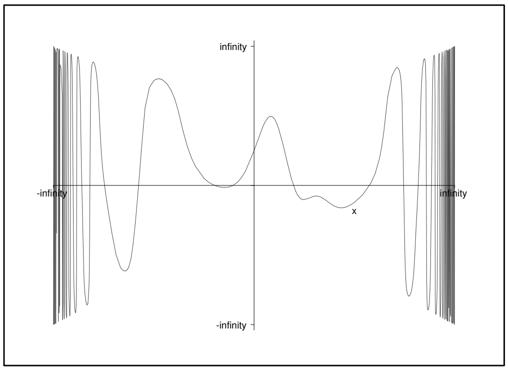


*Abbildung 2.* Der Graph von $g'$

Dies bedeutet aber nicht, daß das Verschwinden der Ableitung $g'$ die Gültigkeit der Regel aufheben würde. In [9] findet sich nämlich eine Verallgemeinerung, nach der – im Falle von *(A2)* – $g'$ gleichzeitig mit $f'$ verschwinden dürfe, während sonst $g'$ sein Vorzeichen nicht wechselt. Als Beispiel können hierfür die Funktionen

$$f(x) := e^{x+\sin(x)}, \quad g(x) := x + \sin(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

genannt werden. Es ist

$$g'(x) = 1 + \cos(x) = 0 \quad \iff \quad x \in \mathcal{N} := \{(2k+1)\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

In der Menge $\mathbb{R}\backslash\mathcal{N}$ wechselt $g'$ sein Vorzeichen nicht, so dass

$$\lim_{+\infty} \frac{f}{g} = \lim_{+\infty} \frac{f'}{g'} = \lim_{x\to+\infty} e^{x+\sin(x)} = +\infty.$$

In Anwendungen kann man gelegentlich auf diese Verallgemeinerung angewiesen sein (vgl. [4], S. 230).

Im Falle von *(A2)* gibt es eine einfachere Methode des Beweises, die der Verwendung des Mittelwertsatzes von Cauchy gegenüber wesentlich einfacher ist. Es darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit $g'(x) > 0$ $(x \in (a,b))$ angenommen werden, sonst wird $f$ durch $(-f)$ bzw. $g$ durch $(-g)$ ersetzt. Demzufolge ist $g$ monoton wachsend (vgl. [11]). Gilt nun *(A2)* (also wegen $g'(x) > 0$ $(x \in (a,b))$: $\lim\limits_{a+0} g = -\infty$), und $L \in \mathbb{R}$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > \max\{a, 0\}$, so dass $g(x) < 0$ $(x \in (a,\delta))$ bzw.

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \varepsilon, \quad \text{d.h.} \quad L - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < L + \varepsilon \quad (x \in (a,\delta)) \tag{9}$$

ist. Wegen der Positivität der Ableitung $g'$ ist dies mit

$$(L-\varepsilon)g'(x) < f'(x) < (L+\varepsilon)g'(x) \quad (x \in (a,\delta))$$

gleichwertig. Die Funktionen

$$\varphi_\varepsilon(x) := f(x) - (L-\varepsilon)g(x) \ \text{ bzw. } \ \psi_\varepsilon(x) := f(x) - (L+\varepsilon)g(x) \ \ (x \in (a,\delta))$$

sind also für alle $\varepsilon > 0$ monoton wachsend bzw. fallend. So ist

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon(a+0) &= \inf\{\varphi_\varepsilon(x) \in \mathbb{R} : \ x \in (a,\delta)\} = -\infty, \\ \psi_\varepsilon(a+0) &= \sup\{\psi_\varepsilon(x) \in \mathbb{R} : \ x \in (a,\delta)\} = +\infty, \end{aligned}$$

denn z. B. aus der Existenz eines $\varepsilon > 0$, für das $\varphi_\varepsilon(a+0) \in \mathbb{R}$ gilt, so dass $\varphi_{\varepsilon/2}(a+0) \in \mathbb{R}$ $(\varphi_\varepsilon < \varphi_{\varepsilon/2})$ folgt

$$g(a+0) = \frac{2}{\varepsilon}\left[\varphi_\varepsilon(a+0) - \varphi_{\varepsilon/2}(a+0)\right] \in \mathbb{R},$$

was *(A2)* widerspricht. So gibt es ein $\widetilde{\delta} \in (a,\delta)$ mit

$$\varphi_\varepsilon(x) < 0 \quad \text{und} \quad \psi_\varepsilon(x) > 0 \quad (x \in (a,\widetilde{\delta})),$$

woraus

$$L - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < L + \varepsilon \quad (x \in (a,\widetilde{\delta})),$$

d. h. $\lim\limits_a (f/g) = L$ folgt. Ist $L$ nicht reell: $L \in \{-\infty,+\infty\}$, so kommt man durch geringfügige Modifikation dieser Beweismethode zum Ziel. Im Falle $L = -\infty$ z. B. hat man dann (9) durch

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < q \quad (x \in (a,\delta))$$

zu ersetzen. Es sei wiederum für beliebiges $q < 0$ die Funktion

$$\psi_q(x) := f(x) - q \cdot g(x) \quad (x \in (a,\delta))$$

definiert, die monoton fällt. Demzufolge gibt es ein $r \in (a,\delta)$, wofür $\psi_q(x) > 0$ $(x \in (a,r))$, also dasselbe wie in (7) gilt.

Im Falle von *(A1)* kommt man auch durch eine andere Überlegung zum Ziel. Gilt nun *(A1)*, so sei $\beta := g(b-0)(>0)$ und man definiere – infolge der stetigen Invertierbarkeit von $g$ – die Funktion $\varphi := g^{-1}$. Es gilt also

$$\varphi : (0,\beta) \to (a,b), \qquad \varphi(y) = x : \ g(x) = y.$$

Anstelle der Funktionen $f$ und $g$ betrachte man $F := f \circ \varphi$. Für alle $y \in (0,\beta)$ gilt somit

$$\frac{F(y)}{y} = \frac{f(\varphi(y))}{g(\varphi(y))} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

bzw.

$$F'(y) = f'(\varphi(y))\varphi'(y) = \frac{f'(\varphi(y))}{g'(\varphi(y))} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Wegen $\lim\limits_0 F = 0$ ist die Funktion

$$\widetilde{F}(y) := \begin{cases} F(y) & (y \in (0,\beta)) \\ 0 & (y = 0) \end{cases}$$

stetig, also zeigt für alle $y \in (0, \beta)$ der Mittelwertsatz von Lagrange[14] – angewendet auf das Interval $[0, y] = [0, g(x)]$ – die Existenz eines $\xi$ zwischen 0 und $y$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\widetilde{F}(y) - \widetilde{F}(0)}{y - 0} = \frac{\widetilde{F}(g(x)) - \widetilde{F}(0)}{g(x) - 0} = \widetilde{F}'(\xi) = \frac{f'(\varphi(\xi))}{g'(\varphi(\xi))} = \frac{f'(g^{-1}(\xi))}{g'(g^{-1}(\xi))}.$$

Aus der Monotonität von $g$ folgt, daß $g^{-1}(\xi)$ zwischen $a$ und $x$ liegt, was die Beziehung

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

zur Folge hat.

Versucht man

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x - \sin(x)}{x + \sin(x)} \tag{10}$$

mit Hilfe der Regel von Bernoulli-l'Hospital zu bestimmen, so erhält man Quotienten, bei denen stets der Zähler und Nenner gegen $+\infty$ streben. Die Regel sei also – wie das in den meisten Lehrbüchern steht – nicht anwendbar. In diesem Falle klammert man sowohl im Zähler als auch im Nenner $e^x$ bzw. $x$ aus und berechnet den Grenzwert wie folgt

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$$

bzw.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x - \sin(x)}{x + \sin(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \dfrac{\sin(x)}{x}}{1 + \dfrac{\sin(x)}{x}} = 1.$$

Wie es im nächsten Paragraphen ersichtlich wird, kann dieser letzte Grenzwert auch als Anwendung einer ähnlichen Regel berechnet werden.

## 4. Die diskrete Version der Regel

In (1) sind die Nenner- und Zählerfunktionen durch ihren Quotienten ersetzt worden und dann ist durch Limesbildung dieser Differenzenquotienten –

[14]Joseph-Louis de Lagrange (Giuseppe Lodovico Lagrangia), italienischer Mathematiker und Astronom (1736 – 1813).

also durch die Ableitung der Nenner- und Zählerfunktionen – der Grenzwert des Quotienten berechnet worden. In der Anwendung kommt es aber oft vor, daß die Nenner- und Zählerfunktionen Folgen bzw. nichtdifferenzierbare Funktionen sind, oder der Limes $\lim_a(f'/g')$ nicht existiert, während $\lim_a(f/g) \in \overline{\mathbb{R}}$ ist. Im ersten Falle kann man z. B. das Folgenkriterium einsetzen: Der Limes bei Folgen kann auf den Limes bei Funktionen zurückgeführt werden. Es gibt aber zahlreiche Beispiele, wo man wegen der Nichtdifferenzierbarkeit von $f$ bzw. $g$ oder wegen der Nichtexistenz von $\lim_a(f'/g')$ andere Methoden heranziehen muß.

Der nächste Satz (vgl. [2]) zeigt, daß die Nenner- und Zählerfunktionen in bestimmten Fällen einfach durch ihre Differenzen ersetzt werden können, ohne ihre Differenzierbarkeit annehmen zu müssen.

Satz 2. *Es seien $a \in \mathbb{R}$, $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ und es gebe ein $b \in (a, +\infty)$ und ein $0 < h \in \mathbb{R}$, wofür $\operatorname{sgn}(g(x+h)) = \operatorname{sgn}(g(x))$ $(x \in [b, +\infty))$ gilt. Ferner treffe eine der folgenden Annahmen zu:*

*(A1)* $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{+\infty} g = 0$,

*(A2)* *$f$ und $g$ sind auf jedem endlichen Teilintervall $[c, d] \subset [a, +\infty)$ beschränkt und $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$.*

*Man nehme weiterhin an, daß der Limes*

$$L := \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{g(x+h) - g(x)}$$

*im eigenlichen oder uneigentlichen Sinne existiert, also $L \in \overline{\mathbb{R}}$ ist. Dann gilt $\lim\limits_{+\infty}(f/g) = L$.*

Der Beweis wird aus Platzgründen hier nicht aufgeführt. Der interessierte Leser möge sich in [2] informieren.

Beispiel 1. *Der zweite Grenzwert in (10) soll berechnet werden. Die Funktionen $f$ und $g$ seien wie folgt definiert:*

$$f(x) := x - \sin(x), \quad g(x) := x + \sin(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

*Dann sind $f$ und $g$ auf jedem endlichen Intervall beschränkt, weiterhin gelten $\lim_{+\infty} g = +\infty$ bzw.*

$$g(x + 2\pi) - g(x) = x + 2\pi + \sin(x + 2\pi) - x - \sin(x) = 2\pi > 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

*Damit sind die Voraussetzunges des Satzes 2 erfüllt, demzufolge gilt*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sin(x)}{x+\sin(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2\pi-\sin(x+2\pi)-x+\sin(x)}{x+2\pi+\sin(x+2\pi)-x-\sin(x)}=1.$$

## 5. Anwendungen

Statt der zahlreichen Grenzwertberechnungen, die im Unterricht als Erläuchterung zu der Regel von Bernoulli-l’Hospital vorkommen, seien hier einige Anwendungen dieser Regel erwähnt, die einfach, nützlich, aber Studierenden weniger bekannt sein dürften.

Oft kommt die Aufgabe vor, für eine Funktion $f$, die in einem $a\in\mathbb{R}$ enthaltenden offenen Intervall $I\subset\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar ist, eine Potenzreihe zu finden, deren Summenfunktion gerade $f$ ist, oder wie man auch sagt, $f$ im Intervall $I$ in eine Potenzreihe um $a$ zu entwickeln:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(x-a)^n\quad(x\in I).$$

Für Funktionen wie $x\mapsto\ln(1+x)$, $x\mapsto\arctan(x)$, $x\mapsto(1+x)^{\alpha}$ zieht man gewöhnlich Kenntnisse über die geometrische Reihe heran, wobei man gliedweise differenzieren und integrieren darf. Die Regel von Bernoulli-l’Hospital bietet eine Methode, mit der man die Taylorsche Entwicklung einer analytischen Funktion gewinnen kann. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit und einfachheitshalber sei $a=0$ vorausgesezt. Für diese Funktion gilt trivialerweise $f(0)=\alpha_0$, also

$$f(x)=f(0)+\alpha_1x+\mathcal{O}(x^2)\quad(x\in I),$$

wobei das Landausche $\mathcal{O}$-Symbol verwendet wird: $\varphi(x)\in\mathcal{O}(x^k)$ $(x\in I)$ ist also eine Funktion, die in einer Nullumgebung nicht wesentlich schneller wächst als die $k$-te Potenz der Identitätsfunktion. Für alle $0\neq x\in I$ gilt dann

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\alpha_1+\mathcal{O}(x)\qquad\text{und}\qquad f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\alpha_1.$$

Demzufolge hat man

$$f(x)=f(0)+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\mathcal{O}(x^3)\quad(x\in I)$$

oder

$$\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}=\alpha_2+\mathcal{O}(x)\quad(0\neq x\in I).$$

So ist der dritte Koeffizient der folgende Grenzwert:

$$\alpha_2 = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{x^2}.$$

Die zweimalige Anwendung der Regel von Bernoulli-l'Hospital ergibt dann

$$\alpha_2 = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(0)}{2}.$$

Mit Induktion ergeben sich die Koeffizienten

$$\alpha_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Beispiel 2. *Die Funktion*

$$f(x) := \ln(1+x) \quad (x \in (-1, +\infty)) \tag{11}$$

*soll in einem Intervall $I$ um 0 in eine Potenzreihe entwickelt werden. Angenommen, die Reihendarstellung hat die Form*

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n \quad (x \in I),$$

*wo der Koeffizient $\alpha_0$ verschwindet: $0 = \ln(1+0) = \alpha_0$. Aus (11) folgt, daß*

$$\ln(1+x) = \alpha_1 x + \mathcal{O}(x^2) \quad (x \in I)$$

*ist. Für alle $0 \neq x \in I$ gilt dann*

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \alpha_1 + \mathcal{O}(x) \quad \textit{also} \quad \alpha_1 = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1.$$

*Daher hat man*

$$\ln(1+x) = x + \alpha_2 x^2 + \mathcal{O}(x^3) \quad (x \in I)$$

*oder*

$$\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \alpha_2 + \mathcal{O}(x) \quad (0 \neq x \in I).$$

*Den dritten Koeffizient bekommt man durch zweimalige Anwendung der Regel von Bernoulli-l'Hospital:*

$$\alpha_2 = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{(1+x)^2} = -\frac{1}{2}.$$

*Man hat also*

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3) \quad (x \in I).$$

*Als nächsten Schritt wird aus*

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \alpha_3 x^3 + \mathcal{O}(x^4) \quad (x \in I),$$

*also aus*

$$\frac{\ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \alpha_3 + \mathcal{O}(x) \quad (0 \neq x \in I)$$

*der nächste Koeffizient berechnet:*

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1 + x}{3x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2} + 1}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{6(1+x)^3} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

*Mit Induktion bekommt man die Koeffizienten für* $1 < n \in \mathbb{N}$ *wie folgt:*

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n-1}x^{n-1}}{x^n} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1 + x - x^2 + \ldots + (-1)^{n-1}x^{n-2}}{nx^{n-1}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} + \frac{-1+(-1)^{n-1}x^{n-1}}{1+x}}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{n(1+x)x^{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.\end{aligned}$$

*Aus dem Quotienten- bzw. Wurzelkriterium folg die Konvergenz der Reihe* $\sum\limits_{n=0}(\alpha_n x^n)$ *für* $x \in (-1,1)$*, womit gilt*

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (x \in (-1,1)).$$

In [8] bzw. in [1] findet man die Reihenentwicklungen für die Funktionen sin bzw. arctan.

Als nächste Anwendung soll die Hardysche Aufgabe bzw. ihre Verallgemeinerung erwähnt werden, indem das Grenzverhalten von

$$\varphi_d(x) := cf(x) + x^d f'(x) \quad (x \in [a, +\infty))$$

mit $a, c \in \mathbb{R}$: $c > 0$, $d \in \{0, 1\}$ untersucht wird, um daraus auf die Werte $\lim\limits_{+\infty} f$ bzw. $\lim\limits_{+\infty} f'$ schließen zu können. Anhand einiger elementarer Funktionen (vgl. [3]) läßt sich vermuten, daß im Falle $d = 0$ aus

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi_0(x) = \lim_{x\to+\infty} (cf(x) + f'(x)) =: L \in \overline{\mathbb{R}}$$

die Grenzwertbeziehungen

$$\lim_{+\infty} f = L/c \text{ und } \lim_{+\infty} f' = 0, \quad (L \in \mathbb{R}) \text{ bzw. } \lim_{+\infty} f = L \quad (L \in \{-\infty, +\infty\})$$

folgen, die mit Anwendung der Regel von Bernoulli-l'Hospital bewiesen werden können:

$$cf(x) = c \cdot \frac{e^{cx} f(x)}{e^{cx}} \sim \frac{e^{cx}[cf(x) + f'(x)]}{e^{cx}} = cf(x) + f'(x) \quad (x \in [a, +\infty)).$$

Im Falle $d = 1$ verfährt man ähnlich:

$$cf(x) = c \cdot \frac{x^c f(x)}{x^c} \sim \frac{x^{c-1}[cf(x) + xf'(x)]}{x^{c-1}} = cf(x) + xf'(x)$$

$$(x \in (\max\{0, a\}, +\infty)).$$

(Das Zeichen $\sim$ deutet auf die Anwendung der Regel von Bernoulli-l'Hospital hin: Der Quotient $f/g$ wird durch $f'/g'$ ersetzt.)

Als letzte Anwendung sollen Folgerungen der diskreten Version erwähnt werden (vgl. [2]).

Ist $\varphi$ eine auf jedem endlichen Teilintervall des Definitionsbereiches $\mathcal{D}_\varphi = [a, +\infty)$ $(a \in \mathbb{R})$ beschränkte Funktion, so hat Satz 2

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} [\varphi(x+1) - \varphi(x)]} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x+1) - \varphi(x)}{x + 1 - x} = \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}}$$

zur Folge, indem man $h := 1$, $g(x) := x$ $(x \in \mathbb{R})$ und $f := \varphi$ setzt. Gilt ferner $\inf \mathcal{R}_\varphi > 0$, so hat man

$$\begin{aligned}
\boxed{\lim_{x\to+\infty} (\varphi(x))^{1/x}} &= \lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{\ln(\varphi(x))}{x}\right) = \exp\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\varphi(x))}{x}\right) \\
&= \exp\left(\lim_{x\to+\infty} [\ln(\varphi(x+1)) - \ln(\varphi(x))]\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \exp\left(\ln\left(\frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)}\right)\right) = \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)}}.
\end{aligned}$$

Die Existenz der rechtsstehenden Grenzwerte sei in beiden Fällen vorausgesetzt. Auf diese Weise läßt sich zum Beispiel der Grenzwert

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{x+1}-\sqrt[n]{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{x}}=0$$

berechnen, oder die Leistungsfähigkeit des Wurzelkriteriums bzw. des Quotientenkriteriums für unendliche Reihen vergleichen:

$$\lim\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=:L\in\overline{\mathbb{R}}\quad\Longrightarrow\quad\lim\left(\sqrt[n]{a_n}\right)=L,$$

wobei $(a_n)$ eine Zahlenfolge mit positiven Gliedern ist.

Bei der Behandlung des Cauchyschen Grenzwertsatzes tauchen die sogenannten ≪Folgenanaloga≫ zur Regel von Bernoulli-l'Hospital, also Sätze vom Cesàro-Stolz-Typ auf. Sie sind Spezialfälle der folgenden Behauptung, die eine unmittelbare Folgerung aus der diskreten Version der Regel von Bernoulli-l'Hospital (also des Satzes 2) ist:

Behauptung 1. *Es seien* $m, N \in \mathbb{N}$*:* $m > 0$, $(a_n)$ *und* $(b_n)$ *Folgen mit* $\operatorname{sgn}(b_n)=\operatorname{sgn}(b_{n+m})$ $(N \le n \in \mathbb{N})$. *Ferner treffe eine der folgenden Annahmen zu:*

*(A1)* $\lim(a_n)=\lim(b_n)=0,$ *(A2)* $\lim(b_n)=+\infty.$

*Dann gilt die Implikation*

$$\lim\left(\frac{a_{n+m}-a_n}{b_{n+m}-b_n}\right)=:L\in\overline{\mathbb{R}}\quad\Longrightarrow\quad\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=L.$$

## Danksagung

Mein besonderer Dank gilt den Herren Professoren Péter Simon, Ferenc Schipp und Gisbert Stoyan für die Anregung und Hinweise bzw. für die kritische Durchlesung des Manuskriptes.

## Literatur


[1] R. Euler, Maclaurin Expansion of Arctan x via L'Hôpital's Rule, *The College Mathematics Journal* **24**, no. 4 (1993), 347–350.

[2] X.-C. Huang, A Discrete L'Hôpital's Rule, *The College Mathematics Journal* **19**, no. 4 (1988), 321–329.

[3] M. D. Landau and W. R. Jones, A Hardy Old Problem, *Mathematics Magazine* **56**, no. 4 (1983), 230–232.

[4] F. Lettenmeyer, *Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von Differentialgleichungen und Differentialgleichungssystemen*, Sitz.-Ber. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-naturw. Abt., 1929.

[5] F. Lettenmeyer, Über die sogenannte Hospitalsche Regel, *Journal für reine und angewandte Mathematik* (1935), 246–247.

[6] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Publishing Co., 1976.

[7] H. Silverman, A Conversion to L'Hôpital's Rule, *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies* **1**, no. 3 (1991), 1935–4053.

[8] M. R. Spiegel, L'Hôpital's Rule and Expansion of Functions in Power Series, *The American Mathematical Monthly* **62**, no. 5 (1955), 358–360.

[9] O. Stolz, *Grundzüge der Differential- und Integralrechnung 1*, Teubner, Leipzig, 1893.

[10] O. Stolz, Ueber die Grenzwerthe der Quotienten, *Math. Ann.* **15** (1879), 556–559.

[11] A. E. Taylor, L'Hospital's Rule, *The American Mathematical Monthly* **59**, no. 1 (1952), 20–24.

[12] H. Wußing and W. Arnold, *Biographien bedeutender Mathematiker*, Berlin, Volk u. Wissen, 1989.


SÁNDOR KOVÁCS
LEHRSTUHL FÜR NUMERISCHE ANALYSIS
DER EÖTVÖS-LORÁND-UNIVERSITÄT
H-1117 BUDAPEST, PÁZMÁNY PÉTER SÉTÁNY 1/C,
UNGARN

*E-mail:* alex@ludens.elte.hu

*(Received February, 2010)*