7/**2** (2009), 229–240
tmcs@math.klte.hu
http://tmcs.math.klte.hu

Teaching Mathematics and Computer Science

Summe einer unendlichen geometrischen Reihe im Mathematikunterricht

Ján Gunčaga

Abstract. This article deals with sums of infinite geometric series. We focus on the understanding of the notion by pupils at secondary school through generic and universal models. In the first part we survey this notion in the Czech and Slovak curriculum. We describe the process of gaining knowledge as a sequence of five stages. In the second part we show one possible approach how to introduce the notion "sum of the infinite geometric series" through this process. We illustrate this on some examples for pupils. At the end we formulate some pedagogical recommendation for teachers.

Key words and phrases: calculus teaching, sum of infinity series, the process of gaining knowledge.

ZDM Subject Classification: I30.

Das vorgegebene Thema wird – den Lehrplänen der slowakischen Gymnasien entsprechend – zu Beginn des letzten Studienjahrgangs unterrichtet. Leider wird es durch viele Lehrer ohne Propädeutik dargestellt. Deshalb erwerben viele Studenten neue Erkenntnisse nur auf der formalen Ebene, weil sie keinen anschaulichen "separierten Modellen" begegnet sind. Das war für mich ein Impuls, Lehrinhalte zum Thema "Summe einer unendlichen Reihe" auszuarbeiten.

Wir werden vom offiziellen Curriculum ausgehen. Später beschreiben wir Stufen des Erkenntnisprozesses. Wir benutzen diese Stufen bei der Einführung des

Begriffs in unserem Unterrichtsexperiment. Deshalb können wir diesen Erkenntnisprozess bei dem Begriff "Summe einer unendlichen Reihe" mit konkreten Beispiele für die Schüler illustrieren. Am Ende formulieren wir einige Empfehlungen für Mathematiklehrer in der Praxis.

1. Begriffe im offiziellen Curriculum

Der Begriff "Summe einer unendlichen geometrischen Reihe" befindet sich im slowakischen Curriculum zusammen mit dem Begriff "Grenzwert der Folge". Diese zwei Begriffe werden entsprechend dem Curriculum des slowakischen Gymnasiums im letzten Schuljahr unterrichtet[1]. Das Curriculum für das achtjährige Gymnasium (5. bis 12. Schulstufe) definiert im thematischen Bereich *Folgen* folgende Ziele und Inhalte:

Ziele:

Definieren der arithmetischen und der geometrischen Folge, Kennen der Terminologie, der Symbolik, der Formel für das n-te Glied und für die Summe,Bestimmung von Differenz bzw. Quotient, Entscheiden, ob eine gegebene Folge arithmetisch oder geometrisch ist, Bestimmen der Monotonie, Bestimmen des Grenzwerts (intuitiv), Bestimmen der Folge von Partialsummen, Bestimmen der Summe einer unendlichen Reihe.

Inhalt:

Die Folge. Rekursive Definition einer Folge. Steigende und fallende Folgen, beschränkte Folge. Graph der Folge. Arithmetische und geometrische Folge, charakteristische Eigenschaften. Die Formel für a_n und s_n. Unendliche Reihe, Summe einer Reihe, unendliche geometrische Reihe und ihre Summe.

2. Stufen des Erkenntnisprozesses

Im Unterrichtexperiment haben wir die Stufen des Erkenntnisprozesses von Hejný [5] benutzt. Dieser Mechanismus geht aus dem Schema **Motivation** → **Erfahrungen** → **Erkenntnis** hervor:

Motivation: Diese Einleitungsphase ist sehr wichtig, weil Sie "Motor" des Erkenntnisprozesses ist. Der Schüler ist fähig ein Problem, das für ihn interessant

[1] Curriculum der slowakischen Gymnasien findet man im Internet an der Webseite http://www2.statpedu.sk/buxus/generate_page.php_page_id=632.html

ist, leichter zu lösen. Deshalb entsteht bei Schüler/innen der Wunsch nach Erkenntnis und Erfahrung in bestimmten Lernbereichen.

Die Schaffung “separierter Modelle”: Der Schüler löst ein Problem durch verschiedene “separierte Modelle”. Dank dieser erwirbt er neue Erfahrungen. Zuerst sieht er keine Zusammenhänge zwischen diesen Erfahrungen. Bei der Arbeit mit den Modellen erreicht er durch Strukturierung und Klassifikation der Erfahrungen ein Universalmodell. Dieses Modell kann die separierten Modelle umfassen. Zum Beispiel addiert der Schüler an der Grundschule 2 Äpfel + 3 Äpfel, später 2 Puppen + 3 Puppen. In dieser Etappe sieht der Schüler keine Zusammenhänge zwischen diesen Beispielen.

Das “Universalmodell”: Dieses Modell zeigt die wichtigsten Eigenschaften der separierten Modelle und umfasst sie. Durch die Arbeit mit diesen kann der Schüler neue Erkenntnisse entdecken. Dieser Übergang im Bewusstsein des Schülers, im Moment der Entdeckung der Erkenntnis, wird Abstraktionshebung genannt. Die Finger sind oft für den Schüler an der Grundschule ein Universalmodell für die Addition (2 Finger + 3 Finger).

Entstehung von Kenntnissen: Neue Erkenntnisse, Begriffe, Beziehungen oder Abhängigkeiten zwischen Phänomenen werden abstrahiert. Der Schüler bestätigt die Richtigkeit der neuen Erkenntnisse an den früheren separierten und Universalmodellen. In dieser Etappe versteht der Schüler an der Grundschule, dass die Ergebnisse der Addition mit den Modellen immer das gleiche Ergebnis bringen ($2 + 3 = 5$).

Kristallisierung: Während dieser Etappe bringt der Schüler die neuen Erkenntnisse in eine Erkenntnisstruktur. Er weitet die Möglichkeiten zu neuen Erkenntnissen aus. Dazu löst er verschiedene Probleme, die mit diesen neuen Erkenntnissen zusammenhängen. In dieser Etappe kann der Schüler neue Kenntnisse entdecken, die mit der vorangehende Phase verbunden sind ($5 - 3 = 2$, $5 - 2 = 3$).

Automatisierung: Der Schüler benutzt automatisch seine neuen Kenntnisse bei der Lösung verschiedener Aufgaben und Probleme. In dieser Etappe braucht er keine Modelle mehr aus den vorangehenden Phasen.

3. Unterrichtsexperiment

Dieses Experiment wurde mit 28 Schülern des letzten Jahrgangs eines vierjährigen slowakischen Gymnasiums realisiert. In diesem Unterrichtsexperiment haben wir den Begriff "Summe einer unendlichen geometrischen Reihe" eingeführt. Wir haben die Stufen des Erkenntnisprozesses bei Hejný [5] benutzt. In der Motivation haben wir das Paradoxon von Zeno – Achilles und Schildkröte verwendet. In dieser Etappe können wir auch andere Modelle und Zugänge benutzen: Quadratur der Parabel von Archimedes, graphische Darstellungen der Summe einer unendlichen Reihe von Nicola Oresme, algebraische Zugänge von Johann Bernoulli und Leonhard Euler. In der Phase des Universalmodels orientieren wir unsere Aktivitäten, damit die Schüler die Definition von Cauchy entdecken können und in der Phase der Kristallisation auch tiefer verstehen können. In folgenden Kapiteln zeigen wir eine Lernsequenz, die wir während 4 Unterrichtstunden realisiert haben.

3.1. Motivation

Das folgende Beispiel haben wir als Motivation für die Gleichung $0,\bar{9} = 1$ benutzt.

Beispiel 1. *Mit dem Taschenrechner habe ich* $1 : 3 = 0,3333333$ *gerechnet. Das Ergebnis habe ich sofort wieder mit* 3 *multipliziert. Der Taschenrechner hat das Ergebnis* $0,9999999$ *gezeigt. Es existieren auch Taschenrechner, die als Ergebnis* 1 *zeigen. Ist* $0,9999999 = 1$*? Sind diese Taschenrechner besser? Wenn* $x = 1 : 3$*, ist* $3x = 1$*? Warum? Ist* $0,9999999..... = 1$*?*

Bemerkung. Es gibt zwei Typen von Taschenrechnern. Ein bestimmter Typ berechnet den Wert der Zahl. Wenn ein entstehender Dezimalbruch zu lang ist, "schneidet" der Rechner den Teil ab, der das Display überschreitet. Diese Taschenrechner zeigen das Ergebnis $0,9999999$. Der zweite Typ – vor allem Taschenrechner für höhere Mathematik – rechnet im Dezimalbruchbereich einer Zahl auch eine bestimmte Anzahl von Stellen, die nach der letzten Zahl im Display folgen. Diese Stellen rundet er allerdings: nämlich auf so viele Stellen, wie das Display Ziffernstellen aufweist. Diese Taschenrechner führen zum Ergebnis 1.

Dieses Beispiel haben wir mit den Schülern diskutiert:

Lehrer: Rechnen Sie mit dem Taschenrechner 1 : 3 und Ergebnis multiplizieren Sie mit 3. Was für ein Ergebnis bekommen Sie?

Veronika, Blažej: 1

Ján, Jana: $0,99999.....$

(Die Schüler verstehen, dass ein Vielfaches eines periodischen Dezimalbruchs wieder ein Dezimalbruch ist.)

Lehrer: Welcher Taschenrechner ist besser? Mit Ergebnis 1 oder $0,9999999$?

Alle Schüler meinen, dass Taschenrechner mit Ergebnis 1 besser ist.

Lehrer: Warum dieser?

Juraj: Dieser ist exakter.

Lehrer: Und was meinen Sie, welche Zahl größer ist? 1 oder $0,99999....$?

(Alle Schüler meinen, dass 1 größer ist.)

Lehrer: $5342 = 5.1000 + 3.100 + 4.10 + 2$. Und wie kann ich $0,999.....$ schreiben?

Juraj schreibt an die Tafel: $9.0,1 + 9.0,01 + 9.0,001 + ... = 9.(0,1 + 0,01 + 0,001 + ...)$

Lehrer: Damit wir mit diesem Term leichter arbeiten können, benutzen wir Summenzeichen. Zum Beispiel $\sum\limits_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{10}\right)^i = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$. Und wenn ich schreibe: $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + ...$ statt 3 oben, schreibe ich...

Blažej: Unendlich (∞)

(Die Schüler wussten gleich, dass 0,1+0,01 +0,001+... eine geometrische Reihe ist.)

Sind die Zahlen $0,\bar{9}$ und 1 gleich oder verschieden? Dazu hilft uns das nächste Beispiel.

Beispiel 2. *Achill, der Held des trojanischen Krieges, ist mit einer Schildkröte um die Wette gelaufen. Achilles lief 10-mal schneller als die Schildkröte. Er hat der Schildkröte einen Vorsprung 100 m gegeben. Wenn Achill nun 100 m läuft, legt die Schildkröte* $\frac{1}{10}$ *dieser Länge zurück. Wenn Achill* $\frac{1}{10}$ *dieser Strecke läuft, läuft Schildkröte* $\frac{1}{100}$ *der Strecke usw. Deshalb kann Achill die Schildkröte nie einholen.*

Dieses Beispiel stammt vom Philosophen Zenon von Elea (496 – 429 vor Chr.) Er konnte nicht vorstellen, dass eine Summe von unendlich vielen Zahlen eine endliche Zahl sein kann. Diese Meinung kann natürlich auch bei Schülern sein. Das Ziel der Unterricht ist, dass die Schüler diese Barriere überwinden können.

Wir setzen jetzt voraus, dass die Geschwindigkeiten von Achill v_a und die der Schildkröte v_k konstant sind und, dass beide in die gleiche Richtung laufen. Da die Schildkröte 10-mal langsamer ist als Achill, so gilt $v_k = 0{,}1v_a$.

Wenn Achill 100 m weit gelaufen ist, hat die von Schildkröte eine Strecke von 10 m zurückgelegt! Wenn Achill 10 m gelaufen ist, hat die Schildkröte 1 m zurückgelegt, usw. Wenn Achill die Schildkröte einholen will, muss er diese Entfernung

$$s = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + ... = 111 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i$$

laufen. Diese Entfernung ist die Summe einer *unendlichen geometrischen Reihe* mit dem ersten Glied 100 und dem Quotienten $\frac{1}{10}$.

Diese Aufgabe kann man auch mit Kenntnissen über die graphische Lösung von Bewegungsaufgaben lösen. Wenn die Geschwindigkeit von Achill v_a und die Geschwindigkeit der Schildkröte $0,1v_a$ und t die Zeit ist, zu der sie sich treffen, dann gilt: $v_a t = 100 + 0,1 v_a t$. Achill ist die Entfernung $s = v_a t$ gelaufen. Daraus folgt: $s = 100 + 0,1s$ und $s = \frac{100}{1-0{,}1} = \frac{1000}{9}$. Kehren wir zu Beispiel 1 zurück. Wir haben gerechnet, dass gilt: $\frac{1000}{9} = 111 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i$. Daraus folgt: $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i = \frac{1000}{9} - 111 = \frac{1}{9}$.

Aus Beispiel 1 bekommen wir: $0{,}\bar{9} = 9.\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i = 9.\frac{1}{9} = 1$.

Wir haben somit ausgerechnet, dass die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe mit dem ersten Glied $\frac{1}{10}$ und dem Quotienten $\frac{1}{10}$ gleich $\frac{1}{9}$ ist.

Lehrer: Warum ist $0,9999.... = 1$?

Juraj: *Weil Achill die Schildkröte einholt!*

Dieser Antwort ist sehr wichtig, weil wir hier sehen können, dass die Schüler intuitiv über Konvergenz einer Folge oder einer Reihe denken können.

3.2. Die Schaffung "separierter Modelle"

Wenn wir Schokolade so teilen, dass wir dem ersten eine Hälfte geben, dem zweiten einen Viertel usw., können wir diese Schokolade ohne Ende teilen. Es gilt nämlich $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$. Das lässt sich mit dieser Abbildung zeigen:

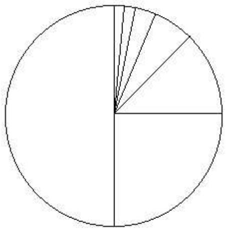
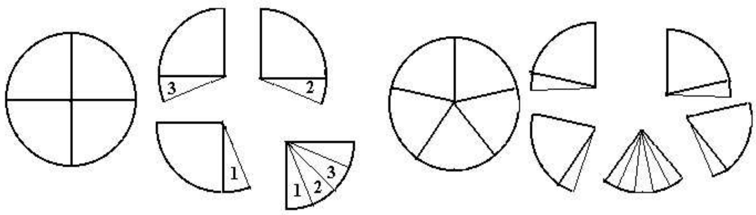


Abbildung 1

Dieses "Tortenmodell" kann man auch für andere geometrische Reihen benutzen (siehe Abbildung 2 – geometrische Reihen mit den Quotienten $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$).



$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + ... = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + ... = \frac{1}{4}$

Abbildung 2

Diese Aufgabe haben die Schüler als Hausaufgabe bekommen. Die meisten Schüler haben diese zwei Ergebnisse gefunden, einige haben auch die Formel $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} + ... = \frac{1}{n-1}$ gefunden.

Jana: Wenn ich das anschaue, kann ich sehen, dass ich im Nenner eine um 1 kleinere Zahl bekomme.

Lehrer: Was für einen Quotient hat diese Reihe? Und was ist ein Quotient?

Veronika: Das ist eine Zahl q, für die gilt $a_2 = a_1 q$. Deshalb: $q = \frac{1}{n}$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} q^i = \frac{q}{1-q}$.

3.3. Das "Universalmodell" und Entstehung von Kenntnissen

In dieser Stufe haben wir ein Modell nach Bindl [1] benutzt (siehe Abbildung 3 – das geometrische Modell für die geometrische Reihe mit dem Quotient $q, 0 < q < 1$ und das erste Glied a):

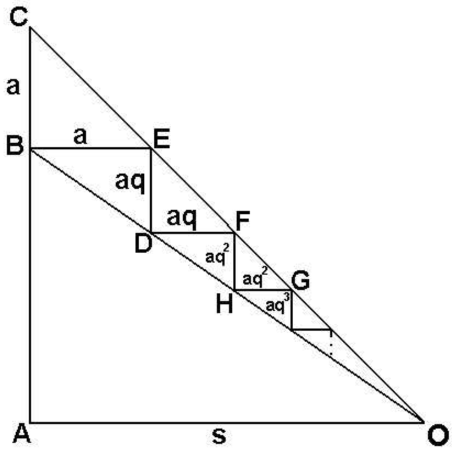


Abbildung 3

Bemerkung. Dieses Modell ist universal, weil er nicht nur für spezielle Werte von dem Quotient der geometrischen Reihe (siehe Tortenmodell) benutzbar ist, sondern für alle Quotienten $q, 0 < q < 1$.

Lehrer: Was kann ich über diese gleichschenkligen Dreiecke sagen?
Zuzana: Sie sind ähnlich.
Juraj: Wir haben die Folge dargestellt.
Lehrer: Was kann ich über die Länge AC sagen?
Veronika: a hoch n?
Jana: $a + aq + \ldots$ $\frac{|BA|}{|AO|} = \frac{|DE|}{|EB|}$ $|AO| = |AC| = s, |EB| = a, |DE| = aq$
$\triangle DEB \sim \triangle BAO$ $\frac{|BA|}{s} = \frac{aq}{a} \Rightarrow |BA| = sq$.
Weil $|AC| = |BA| + |BC|$, $s = sq + a$ und $s = \frac{a}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$.

3.4. Kristallisierung und Automatisierung

In dieser Stufe haben wir die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe mit Quotient $-1 < q < 0$ untersucht. Viele Schüler meinen, dass diese Reihe divergent ist. Für den Fall $-1 < q < 0$ haben wir die Substitution $p = -q$ benutzt:

$$s = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + ... = a_1 + a_1(-p) + a_1(-p)^2 + a_1(-p)^3 + ... =$$

$$= (a_1 + a_1 q^2 + a_1 q^4 + ...) - (a_1 q + a_1 q^3 + a_1 q^5 + ...) =$$
$$= \frac{a_1}{1-p^2} - (\frac{a_1 q}{1-p^2}) = \frac{a_1(1-p)}{1-p^2} = \frac{a_1}{1+p} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Zum Schluss wurde die formale Definition der Summe einer unendlichen Reihe mit Hilfe der Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ eingeführt. Wir haben folgende Definition benutzt:

Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hat eine Summe s, wenn

$$\forall \varepsilon \in R^+ \quad \exists m \in N \quad \forall n \in N;\, n \geq m \Rightarrow s - \varepsilon < \sum_{n=1}^{m} a_i < s + \varepsilon.$$

Jede Reihe, die eine Summe hat, ist eine konvergente Reihe.

Diese Kenntnisse wurden anhand von Aufgaben geübt. Wir zeigen jetzt zwei Aufgaben mit typischen Fehlern der Schüler:

Aufgabe 1. *Welcher Bruch stellt die Zahl* $0,\overline{32}$ *vor?*

Drei Viertel der Schüler haben diese Aufgabe richtig gelöst. Einige Schüler wussten nicht die Formel für die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe:

Cecília: $0,\overline{32} = 32.10^{-2} + \ldots + 32.10^{-2n} + \ldots$

$0,\overline{32} = 32 \cdot \frac{1}{100}$

Jozef hat in seiner Lösung folgenden numerischen Fehler gemacht und hat falschen Ausdruck des Terms $0,\overline{32}$ im dezimalen Zahlensystem benutzt: $0,\overline{32} = 0,32 + 0,0032 + 0,00032 + \ldots$

Mária hat einen Fehler im Quotient der geometrischen Reihe gemacht: $0,\overline{32} = 0,32 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10^n}\right)$.

Viele Schüler haben Schwierigkeiten mit den geometrischen Reihen, die einen negativen Quotient haben. In den Aufgaben mit diesen Reihen machen die Schüler numerische Fehler. Die Konvergenz dieser Reihen verstehen die Schüler schwieriger.

Aufgabe 2. *Welche der folgenden Reihen ist konvergent? Finden Sie deren Summe.*
a) $\left(\frac{-10}{7}\right)+\left(\frac{-10}{7}\right)^2+\left(\frac{-10}{7}\right)^3+\dots$
b) $\left(\frac{-7}{10}\right)+\left(\frac{-7}{10}\right)^2+\left(\frac{-7}{10}\right)^3+\dots$

Diese Aufgabe hat nur eine Drittel der Schüler richtig gelöst. Einige Schüler haben in der Aufgabe 2 a) eine falsche Antwort geschrieben, dass der Quotient der Reihe größer als 1 ist und die Reihe ist konvergent. Sie haben vergessen, dass die Reihen mit dem Quotient $|q|<1$ konvergent sind. Ivana hat die Formel $s=\frac{a_1}{1-q}$ benutzt: $s=\frac{\frac{-10}{7}}{1+\frac{10}{7}}=-\frac{10}{17}$.

In der Aufgabe 2 b) hat eine Viertel der Schüler nur richtig geschrieben, dass diese Reihe konvergent ist. Eine Viertel der Schüler hat geschrieben, dass diese Reihe divergent ist. Katarína, Mária und Viera haben nicht den Quotient $-\frac{7}{10}$, sondern $\frac{7}{10}$ benutzt: $s=\frac{\frac{-7}{10}}{1-\frac{7}{10}}=-\frac{7}{3}$.

4. Zusammenfassung und Empfehlungen für die Unterrichtspraxis

Der Begriff "Summe einer unendlichen geometrischen Reihe" gehört zu den Grundbegriffen der Analysis, die mit einigen Grenzwertprozessen im Zusammenhang stehen. Diese Prozesse gehören zu den schwierigen Teilen der Mathematik am Gymnasium. Die Zeit für eine Behandlung mit diesem Begriff ist in den slowakischen Schulen meist knapp. Deshalb gibt es die Gefahr, dass die Schülerkenntnisse nur formal sind. Hilfreich sind für die Motivation in diesem Zusammenhang die Beispiele aus der Geschichte der Mathematik oder aus anderen Themenbereichen der Schulmathematik. In diesem Artikel haben wir das Paradoxon von Zenon, "Achilles und Schildkröte", und die Darstellung von Dezimalzahlen durch Brüche vorgestellt. Die Schüler können ähnlich wie Zeno eine Barriere beim Verstehen der Konvergenz einer unendlichen Reihe haben. Diese Barriere helfen die Beispiele aus anderen Bereichen (Bewegungsaufgaben, Anwendungen aus der Physik) überwinden.

Die Schüler verstehen, dass Vielfache eines periodischen Dezimalbruchs wieder ein periodischer Dezimalbruch ist. Am Anfang sind beinahe alle der Meinung, dass $0,\bar{9} < 1$. Im Anschluss an das Beispiel 2 haben wir Schüler gefragt, warum eigentlich $0,\bar{9} = 1$ ist? Eine Antwort war: "Achill hat die Schildkröte eingeholt!" Man kann sehen, dass Schüler über Grenzwertprozesse in Bezug auf eine Summe in einer unendlichen Reihe intuitive Vorstellungen erwerben. Der Denkprozess ist nur in diesem Fall – passend zum Schritt der Verallgemeinerung – weiter zu entwickeln.

Geometrische Modelle sind separierte und universale Modelle im Sinn der Theorie von Erkenntnisprozessen (siehe Hejný [5]). Sie können Schüler zu einem tieferen Verständnis der Grenzwertprozesse zum Begriff "Summe einer unendlichen geometrischen Reihe" führen. Weitere Modelle kann man in [2] und [7] finden.

In der Etappe der Kristallisierung und Automatisierung ist es wichtig, mit den Schülern die Aufgaben zu üben, die sich mit geometrischen Reihen mit negativen Quotienten beschäftigen. Gute Fähigkeiten im Umformen von Termen, Gleichungen, usw. sind für die Lösung der verständnisorientierten Aufgaben nicht genug. Das Verständnis der Begriffe ist ganz wichtig, weil wenn die Schüler die Begriffe nicht verstehen, machen sie Fehler ganz am Anfang. Wenn sie in ihrer Lösung keine formalen Fehler haben, sind ihre Ergebnisse nicht richtig. Deshalb muss der Lehrer ihre Aufmerksamkeit auf den Erkenntnisprozess von der Motivation bis Entdeckung der Erkenntnis richten.

Bemerkung. Dieser Beitrag wurde vom Grant KEGA 3/7068/09 unterstützt.

Literatur

[1] A. Bindl, *Geometrischen Reihen an der 9. Klasse*, in: *Praxis der Mathematik*, Heft 3, 1999, 158–162.

[2] P. Eisenmann, *Endlich oder unendlich viele? – über eine Diskussion in der gymnasialen Oberstufe*, in: *Mathematik in der Schule*, Nr. 5, Berlin, 1998, 275 – 277.

[3] J. Gunčaga, *Lernsequenz zum Thema Summe einer unendlichen geometrischen Reihe*, in: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Berlin, Verlag Franzbecker, 2003, 265–268.

[4] T. Hecht, *Postupnosti*, Bratislava, Orbis Pictus Istropolitana, 2000.

[5] M. Hejný, *Understanding and Structure*, in: *Proceedings of CERME 3*, CD-ROM, Pisa, University of Pisa, 2003, `www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/groups/TG3/TG3_Hejny_cerme3.pdf`.

[6] I. Kluvánek, *Čo nie je dobré vo vyučovaní matematickej analýzy? I/II*, in: *Matematické obzory*, Nr. 36, 23 – 49 / Nr. 37, 47 – 66, 1991.

[7] S. Hajdu, I. Czeglédy, S. Z. Hajdu, A. Kovács, *Matematika 12*, Budapest, Műszaki Kiadó, 2007.

[8] C. P. Rosenbloom and S. Schuster, *Introduction to the calculus*, New Jersey, Prentice – Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1966.

[9] Š. Tkačik, *Why logarithms?*, in: *Matematyka XII prace naukowe*, AJD, Czestochowa, 2007, 429 – 434.

JÁN GUNČAGA
LEHRSTUHL FÜR MATHEMATIK
PÄDAGOGISCHE FAKULTÄT DER KATHOLISCHEN UNIVERSITÄT
HRABOVSKÁ CESTA 1/1652
034 01 RUŽOMBEROK
SLOWAKEI

E-mail: `guncaga@fedu.ku.sk`

(Received January, 2009)