7/2 (2009), 217–228
tmcs@math.klte.hu
http://tmcs.math.klte.hu

Teaching Mathematics and Computer Science

Zur Visualisierung des Satzes von Pythagoras

Oswald Giering

Abstract. In this article we make a study of a not-classical visualization of the theorem of Pythagoras using methods of elementary school geometry. We find collinear points, copoint straight lines and congruent pairs of parallelograms. The configuration of their midpoints induces a six-midpoint and a four-midpoint theorem.

Key words and phrases: mathematics teaching, theorem of Pythagoras, visualization.

ZDM Subject Classification: G40.

In jedem rw.[1] Dreieck ist die Summe der Quadrate über den Katheten flächengleich dem Quadrat über der Hypotenuse. Eine Variante dieser klassischen Visualisierung des Satzes von Pythagoras[2] stellt sich ein, wenn man die Seiten eines rw. Dreiecks ABC nicht als *Quadratseiten*, sondern als *Quadratdiagonalen* wählt. Dann ist die Summe dieser Quadrate über den Katheten ebenfalls flächengleich dem Quadrat über der Hypotenuse. Im Vergleich zur klassischen Visualisierung besitzen die Quadrate dieser Variante den halben Flächeninhalt.

Wir beschreiben im Folgenden einige Eigenschaften der *Quadratfigur* dieser Variante. Dabei erweisen sich die nach ihrer Definition vorhandenen Parallelitäten und Orthogonalitäten, ebenso die mit den spitzen Innenwinkeln α (bei A) und β (bei B) eines rw. Dreiecks ABC übereinstimmenden Winkel sowie die *Gleichberechtigung der Katheten* und der beiden *Kathetenquadrate* als besonders nützlich.

[1] lies: rechtwinkligen
[2] $\sim$ 580 (Samos)– $\sim$ 500 (Metapontum, Unteritalien)

Abbildung 1 zeigt über den Seiten eines rw. Dreiecks ABC die *Quadrate mit den Dreieckseiten als Quadratdiagonalen.* Die von den Dreieckseiten verschiedenen Quadratdiagonalen liegen auf den Mittelloten des Dreiecks ABC, die einander in seinem Umkreismittelpunkt M schneiden. Wir bezeichnen die von A, B, C verschiedenen Quadratecken 1, 2, 3 als die *Innenecken* und 4, 5, 6 als die *Außenecken* des rw. Dreiecks ABC und seiner Seiten. Dabei sind

1, 4 die Gegenecken des Kathetenquadrats über $\overline{AC}$[3],

2, 5 die Gegenecken des Kathetenquadrats über $\overline{BC}$,

3, 6 die Gegenecken des Hypotenusenquadrats über $\overline{AB}$.

Die Außenecken 4, 5, 6 liegen stets im Außengebiet des Dreiecks ABC. Die 9 Ecken A, B, C; 1, 2, 3; 4, 5, 6 lassen sich zu einem Rechtecksgitter vervollständigen, dem weitere Quadrate angehören. Die Ecken C, 1, 2 und C, 4, 5 sind nach Konstruktion jeweils kollinear (auf einer der Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC durch C). Wir zeigen in Satz 1, dass dies auch für die Ecken C, 1, 2, 6 und C, 4, 5, 3 zutrifft. In Abschnitt 1 folgen weitere Grundeigenschaften der Quadratfigur. Abschnitt 2 befasst sich mit Kopunktalitäten und Kollinearitäten. Dabei erweisen sich die Verbindungsgeraden $A2$, $B1$, $C3$ der Dreiecksecken A, B, C mit den Innenecken 2, 1, 3 ihrer Gegenseiten als kopunktal (Abb. 2). Dasselbe gilt für die Geraden $A5$, $B4$, $C6$. Die Abschnitte 3 und 4 befassen sich mit zwei Paaren drehungsgleicher Parallelogramme (Abb. 3). Ergänzt man deren Mittelpunkte (kurz: Mitten) durch die Mitte M der Hypotenuse $\overline{AB}$ und die Mitte Z der Seitenhalbierenden $\overline{CM}$ des Dreiecks ABC, so stellt sich in Abschnitt 5 ein *Sechsmittensatz* – und als Korollar ein *Viermittensatz* (Abb. 4) – ein. Durch Aufsetzen anderer Figuren auf den Seiten eines rw. Dreiecks lassen sich weitere Visualisierungsvarianten des Satzes von Pythagoras erzeugen und studieren.

1. Grundeigenschaften der Quadratfigur

Vierteldrehungen um M: In Abbildung 1 bringt die Vierteldrehung (im Gegenzeigersinn) um M die Quadratseite $\overline{A1}$ nach $\overline{62}$, folglich ist $\overline{A1} = \overline{62}$. Beachtet man $A1 \perp C2$, so folgt die Kollinearität der Ecken C, 1, 2, 6. Ihre Verbindungsgerade $C126$ halbiert den rechten Winkel $\sphericalangle BCA$. Ebenso bringt die Vierteldrehung (im Uhrzeigersinn) um M die Quadratseite $\overline{A4}$ nach $\overline{35}$, folglich ist $A4 \perp 35$. Mit $A4 \perp C5$ folgt die Kollinearität der Ecken C, 4, 5, 3.

[3] $\overline{AC}$ bezeichnet die *Strecke* mit den Endpunkten A und C, auch die *Streckenlänge*; AC bezeichnet die *Verbindungsgerade* der Punkte A und C.

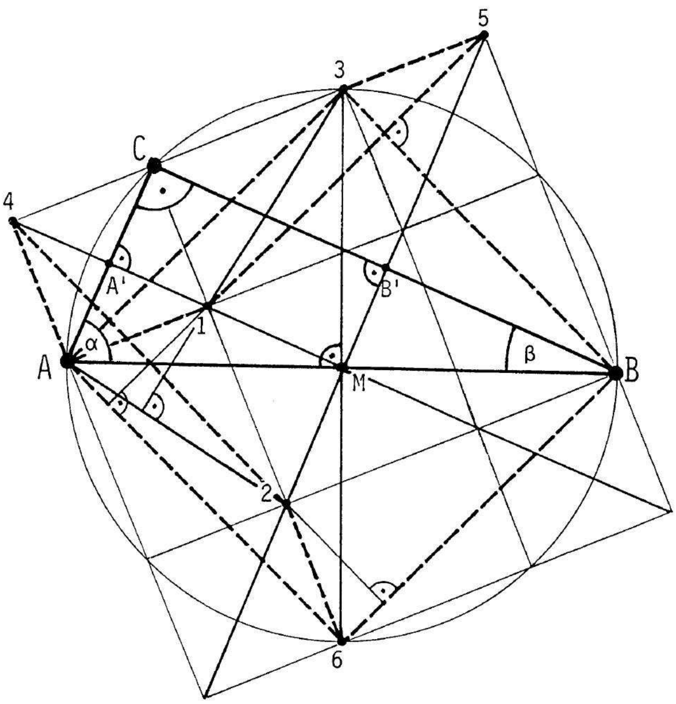

Abbildung 1

Ihre Verbindungsgerade $C453$ ist orthogonal zu $C126$. Wir erhalten

Satz 1. *In einem rw. Dreieck ABC mit den Innenecken* 1, 2, 3 *und den Außenecken* 4, 5, 6 *sind mit der Rechtwinkelecke C kollinear:*

(a) *die Innenecken* 1, 2 *der Katheten und die Außenecke* 6 *der Hypotenuse,*

(b) *die Außenecken* 4, 5 *der Katheten und die Innenecke* 3 *der Hypotenuse.*

(c) *Wegen $\overline{C4} = \overline{26}$ und $\overline{C5} = \overline{C2}$ sind die orthogonalen Strecken $\overline{C6}$ und $\overline{45}$ längengleich: $\overline{C6} = \overline{45}$.*

Satz 1 ergibt sich auch bei Vierteldrehungen der Quadratseiten $\overline{B2}$ und $\overline{B5}$ um M. Aus Satz 1 folgt (Abb. 1):

Satz 2. *In einem rw. Dreieck ABC mit den Innenecken* 1, 2, 3 *und den Außenecken* 4, 5, 6 *gilt: Die Parallelen durch A und B zur Halbierenden $C6$*

des rechten Winkels $\sphericalangle BCA$ *und ihre orthogonalen Geraden durch die Ecken* C *und* 6 *liegen auß den Seiten eines Quadrats über* $\overline{45}$. *Quadratmittelpunkt ist der Umkreismittelpunkt* M *des Dreiecks* ABC. *Die Mittellote der Katheten* $\overline{AC}$ *und* $\overline{BC}$ *liegen auß den Quadratdiagonalen. Die Parallelen durch die Innenecken* 1, 2 *zu* 45 *und durch die Ecken* 3, C *zu* 12 *liegen ebenfalls auß den Seiten eines Quadrats mit Mittelpunkt* M.

Vierteldrehungen um A': Die Vierteldrehung (im Gegenzeigersinn) um die Mitte A' der Kathete $\overline{AC}$ bringt die rw. Dreiecke der linken Spalte in (1) in die – dazu kongruenten – rw. Dreiecke der mittleren Spalte und ihre Hypotenusen in zueinander orthogonal Lage (rechte Spalte):

$$\begin{array}{lll} \Delta A12 \simeq \Delta 1C3, & A2 \perp 13 & \text{(Abb. 2) (a)} \\ \Delta A16 \simeq \Delta 1C5, & A6 \perp 15 & \text{(Abb. 1) (b)} \\ \Delta 4C2 \simeq \Delta A43, & A3 \perp 42 & \text{(Abb. 1) (c)} \\ \Delta 4C6 \simeq \Delta A45, & A5 \perp 46 & \text{(Abb. 2) (d)} \end{array} \tag{1}$$

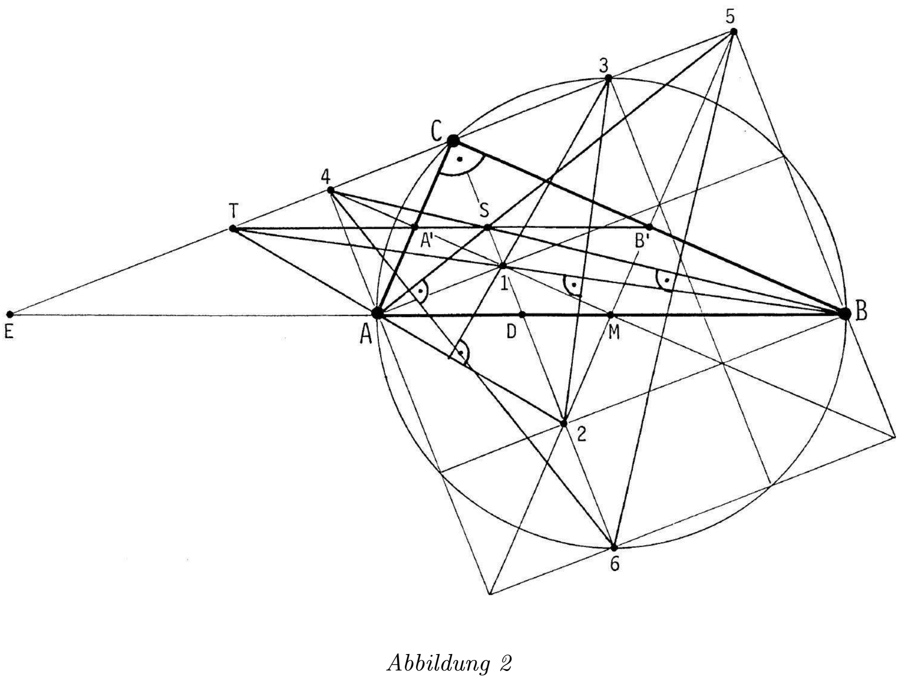

Abbildung 2

Vierteldrehungen um B': Die Vierteldrehung (im Uhrzeigersinn) um die Mitte B' der Kathete $\overline{BC}$ bringt die rw. Dreiecke der linken Spalte in (2) in die – dazu kongruenten – rw. Dreiecke der mittleren Spalte und ihre Hypotenusen in zueinander orthogonale Lage (rechte Spalte):

$$\begin{array}{lll} \Delta B21 \simeq \Delta 2C3, & B1 \perp 23 & \text{(Abb. 2) (a)} \\ \Delta B26 \simeq \Delta 2C4, & B6 \perp 24 & \text{(Abb. 1) (b)} \\ \Delta 5C1 \simeq \Delta B53, & B3 \perp 51 & \text{(Abb. 1) (c)} \\ \Delta 5C6 \simeq \Delta B54, & B4 \perp 56 & \text{(Abb. 2) (d)} \end{array} \tag{2}$$

2. Kopunktalitäten und Kollinearitäten

In Abbildung 2 sei $S_1 := A5 \cap C6$. Dann gilt in Dreieck $A45$:

$$\overline{S_1C} : \overline{A4} = \overline{C5} : \overline{45}, \quad \text{also} \quad \overline{S_1C} = \frac{\overline{A4} \cdot \overline{C5}}{\overline{45}}. \tag{3}$$

Weiter sei $S_2 := B4 \cap C6$. Dann gilt in Dreieck $B54$:

$$\overline{S_2C} : \overline{B5} = \overline{C4} : \overline{45}, \quad \text{also} \quad \overline{S_2C} = \frac{\overline{B5} \cdot \overline{C4}}{\overline{45}}. \tag{4}$$

Wegen $\overline{A4} = \overline{C4}$ und $\overline{B5} = \overline{C5}$ folgt aus (3) und (4) $\overline{S_1C} = \overline{S_2C}$. Da die Schnittpunkte S_1 und S_2 auf derselben Seite der Geraden 45 liegen, folgt $S_1 = S_2 =: S$. Ersetz man die Außenecken 4, 5, 6 durch die Innenecken 1, 2, 3 und betrachtet die Schnittpunkte $T_1 := A2 \cap C3$ und $T_2 := B1 \cap C3$, so folgt analog $T_1 = T_2 =: T$. Man hat daher (Abb. 2):

SATZ 3. *In einem rw. Dreieck ABC mit den Innenecken 1, 2, 3, und den Außenecken 4, 5, 6 gilt:*

(a) *Die Verbindungsgeraden $A2$, $B1$, $C3$ der Dreiecksecken mit der Innenecke ihrer Gegenseite sind kopunktal in einem Punkt T. Die Geradenpaare $A2$, 13 und $B1$, 23 sind nach* (1a) *und* (2a) *orthogonal.*

(b) *Die Verbindungsgeraden $A5$, $B4$, $C6$ der Dreiecksecken mit der Außenecke ihrer Gegenseite sind kopunktal in einem Punkt S. Die Geradenpaare $A5$, 46 und $B4$, 56 sind nach* (1d) *und* (2d) *orthogonal.*

In Abbildung 2 gilt in den Dreiecken $A4B$ und DSB ($D := AB \cap C6$) wegen $A4 \| DS$:

$$\overline{DS} : \overline{A4} = \overline{DB} : \overline{AB} = \overline{C5} : \overline{45}, \quad \text{also} \quad \overline{DS} = \frac{\overline{A4} \cdot \overline{C5}}{\overline{45}}. \tag{5}$$

Wegen $S_1 = S$ folgt aus (3) und (5): $\overline{DS} = \overline{SC}$. Beachtet man $\overline{AA'} = \overline{A'C}$, $\overline{BB'} = \overline{B'C}$ und die Kollenearität der Punkte A, D, B, so ergibt sich die Kollineartät der Punkte A', S, B'. In den Dreiecken $A1B$ und ETB ($E := AB \cap C5$) gilt wegen $A1 \| ET$:

$$\overline{ET} : \overline{A1} = \overline{TB} : \overline{1B} = \overline{C2} : \overline{12}, \quad \text{also} \quad \overline{ET} = \frac{\overline{A1} \cdot \overline{C2}}{\overline{12}}. \tag{6}$$

Weiter gilt in den Dreiecken $TC2$ und $A12$ wegen $TC \| A1$:

$$\overline{TC} : \overline{A1} = \overline{C2} : \overline{12}, \quad \text{also} \quad \overline{TC} = \frac{\overline{A1} \cdot \overline{C2}}{\overline{12}}. \tag{7}$$

Aus (6) und (7) folgt $\overline{ET} = \overline{TC}$ (T ist die Mitte der Strecke $\overline{EC}$). Damit ergibt sich unter Beachtung von Satz 4:

Satz 4. *In einem rw. Dreieck ABC mit den Innenecken 1, 2, 3 und den Außenecken 4, 5, 6 gilt:*

(a) *Der Schnittpunkt T der Geraden $A2$, $B1$, $C3$ ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CE}$.*

(b) *Der Schnittpunkt S der Geraden $A5$, $B4$, $C6$ ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CD}$.*

(c) *Die Schnittpunkte T, S liegen auf der (zur Hypotenuse $\overline{AB}$ parallelen) Mittelparallelen $A'B'$ des Dreiecks ABC.*

3. Drehungsgleiche Parallelogramme

Weitere Vierteldrehungen um M: Nach Konstruktion unserer Variante zum Satz des Pythagoras gilt in Abbildung 3: Wegen $26 \| A4$ und $\overline{26} = \overline{A1} = \overline{A4}$ ist $24 \| A6$. Das Viereck $A426$ ist folglich ein *Parallelogramm.* Ebenso ist das Viereck $A153$ ein *Parallelogramm.* Die Vierteldrehung (im Uhrzeigersinn) um M bringt das Parallelogramm $A426$ nach $A153$. Nach (1c) ist $A3 \perp 42$ und nach (1b) $A6 \perp 15$.

Ersetzt man die Dreiecksecke A durch B, so erweisen sich die Vierecke $B516$ und $B243$ ebenfalls als Parallelogramme. Die Vierteldrehung (im Uhrzeigersinn) um M bringt das Parallelogramm $B243$ nach $B516$. Nach (2c) ist $B3 \perp 51$ und nach (2b) $B6 \perp 24$.

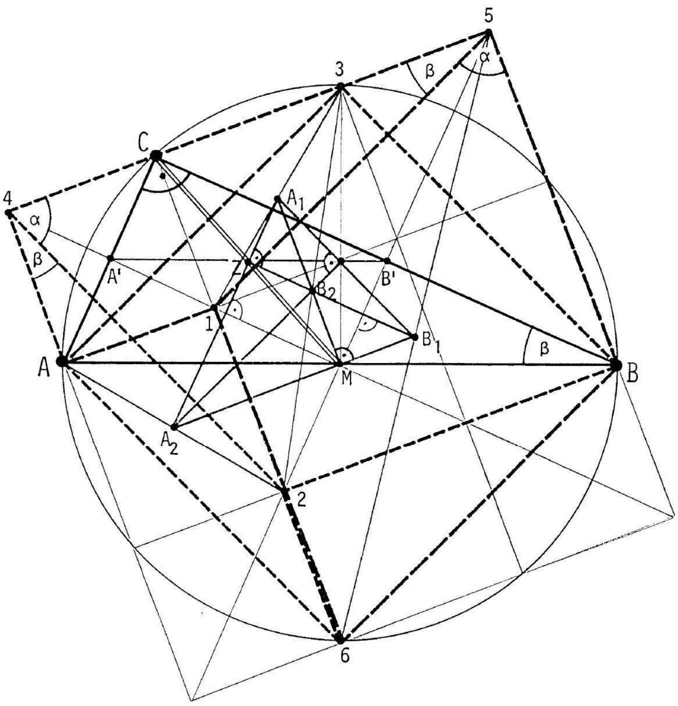

Abbildung 3

Die bezüglich M drehungsgleichen Parallelogramme $A426$ und $A153$ besitzen die Innenwinkel $\beta := \sphericalangle ABC$ und $\pi - \beta$ (denn in Dreieck $4AM$ mit den Innenwinkeln $\sphericalangle 4AM$, β und $\frac{\pi}{4}$ ist $\sphericalangle 4AM = \frac{3\pi}{4} - \beta$, also $\sphericalangle 4A6 = \sphericalangle 4AM + \frac{\pi}{4} = \pi - \beta$). Entsprechend besitzen die Parallelogramme $B243$ und $B516$ die Innenwinkel α und $\pi - \alpha$.

Damit gilt:

Satz 5. *In einem rw. Dreieck ABC mit den Innenecken 1, 2, 3, den Außenecken 4, 5, 6 und dem Umkreismittelpunkt M gilt: Die Vierecke* $A426$ *und* $A153$, *sowie* $B243$ *und* $B516$, *sind jeweils bezüglich einer Vierteldrehung um M drehungsgleiche Parallelogramm mit den Innenwinkeln β und $\pi - \beta$ bzw. α und $\pi - \alpha$.*

4. Die Mittelpunkte der Parallelogramme

Wir betrachten nun in Abbildung 3 den Mittelpunkt A_1 des Parallelogramms $A153$ (zugleich Mittelpunkt der Diagonale $\overline{13}$) und den Mittelpunkt A_2 des Parallelogramms $A426$ (zugleich Mittelpunkt der Diagonale $\overline{A2}$). Dann gilt (Streckung von $\overline{A_1A_2}$ aus A nach $\overline{52}$):

$$A_1A_2 \| 52 \| CA, \quad \overline{A_1A_2} = \frac{1}{2}\overline{52} = \frac{1}{2}\overline{BC}. \tag{8}$$

Betrachtet man den Mittelpunkt B_1 des Parallelogramms $B516$ (zugleich Mittelpunkt der Diagonale $\overline{56}$) und den Mittelpunkt B_2 des Parallelogramms $B243$ (zugleich Mittelpunkt der Diagonale $\overline{23}$), so gilt entsprechend zu (8):

$$B_1B_2 \| 41 \| CB, \quad \overline{B_1B_2} = \frac{1}{2}\overline{41} = \frac{1}{2}\overline{AC}. \tag{9}$$

Wegen (8) ist A_1A_2 die *Mittelparallele* der parallelen Geraden 52 und CA, und wegen (9) ist B_1B_2 die *Mittelparallele* der parallelen Geraden 41 und CB. Jede der beiden Mittelparallelen A_1A_2, B_1B_2 schneidet die Strecke $\overline{CM}$ in ihrem Mittelpunkt Z. Beachtet man noch $A_1A_2 \| CA$ (nach (8)) und $B_1B_2 \| CB$ (nach (9)) sowie die Orthogonalität der Katheten ($\overline{CA} \perp \overline{CB}$), so folgt $A_1A_2 \perp B_1B_2$. Man hat somit:

Satz 6. *In einem rw. Dreieck ABC gilt unter Voraussetzungen von Satz 5: Die Verbindungsgerade der Mittelpunkte A_1, A_2 der Parallelogramme $A426$, $A153$ schneidet die (dazu orthogonale) Verbindungsgerade der Mittelpunkte B_1, B_2 der Parallelogramme $B516$, $B243$ im Mittelpunkt Z der Seitenhalbierenden $\overline{CM}$.*

5. Ein Sechs- und ein Viermittensatz

Wir knüpfen an einige *Mitteneigenschaften* und *Orthogonalitäten* an und ziehen zunächst gleichartige Folgerungen, die wir in (10)–(20) tabellenartig darstellen. Das Zeichen "m" ist dabei als "Mitte von" zu lesen:

$$\{Mm\overline{AB}, A_2m\overline{A2}\} \Rightarrow \left\{MA_2 \| B2, \overline{MA_2} = \frac{1}{2}\overline{B2}\right\} \qquad \text{(Streckung aus } A\text{)} \tag{10}$$

$$\{Mm\overline{AB}, A_1m\overline{A5}\} \Rightarrow \left\{MA_1 \| B5, \overline{MA_1} = \frac{1}{2}\overline{B5}\right\} \qquad \text{(Streckung aus } A\text{)} \tag{11}$$

$$\{Mm\overline{63}, B_2m\overline{23}\} \Rightarrow \left\{MB_2 \| 62, \overline{MB_2} = \frac{1}{2}\overline{62}\right\} \qquad \text{(Streckung aus 3)} \tag{12}$$

$$\{Mm\overline{63}, B_1m\overline{65}\} \Rightarrow \left\{MB_1\|53, \overline{MB}_1 = \frac{1}{2}\overline{53}\right\} \qquad \text{(Streckung aus 6)} \tag{13}$$

$$\{B_1m\overline{65}, A_1m\overline{A5}\} \Rightarrow \left\{A_1B_1\|A6, \overline{A_1B_1} = \frac{1}{2}\overline{A6}\right\} \qquad \text{(Streckung aus 5)} \tag{14}$$

$$\{B_2m\overline{B4}, A_2m\overline{64}\} \Rightarrow \left\{A_2B_2\|B6, \overline{A_2B_2} = \frac{1}{2}\overline{B6}\right\} \qquad \text{(Streckung aus 4)} \tag{15}$$

Aus (10) und (11) folgt: $MA_1 \perp MA_2, \quad \overline{MA}_1 = \overline{MA}_2 = \frac{1}{2}\overline{B2}.$ (16)

Aus (12) und (13) folgt: $MB_1 \perp MB_2, \quad \overline{MB}_1 = \overline{MB}_2 = \frac{1}{2}\overline{C1}.$ (17)

Aus (14) und (15) folgt: $A_1B_1 \perp A_2B_2, \quad \overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2} = \frac{1}{2}\overline{B6}.$ (18)

Aus (10) und (11) folgt: $M,\ A_2,\ B_1$ kollinear. (19)

Aus (11) und (12) folgt: $M,\ A_1,\ B_2$ kollinear. (20)

Nun folgt mit (16): Die Vierteldrehung (im Uhrzeigersinn) um M bringt $\overline{MA}_2$ nach $\overline{MA}_1$. Zusammen mit (8) ($A_1A_2\|AC$) und folglich $A_1A_2 \perp M4$ erhält man: *Die Parallelogrammmitten A_1, A_2 liegen symmetrisch zur Mittelparallelen MA' des Dreiecks ABC*. Entsprechend folgt: *Die Parallelogrammmitten B_1, B_2 liegen symmetrisch zur Mittelparallelen MB' des Dreiecks ABC* (Abb. 2, Abb. 3).

Aus (12) ($MB_2\|62$) und (9) ($B_1B_2\|CB$) erhält man $\sphericalangle MB_2B_1 = \sphericalangle ZB_2A_1 = 45°$. Daraus folgt mit Satz 6 ($A_1A_2 \perp B_1B_2$):

$$\overline{A_1Z} = \overline{ZB}_2. \tag{21}$$

Aus (10) ($MA_2\|B2$), (19), (9) ($B_1B_2\|CB$) und Satz 6 (B_1, B_2, Z kollinear) folgt zunächst $\sphericalangle ZB_1M = \sphericalangle B_2B_1M = \sphericalangle CB2 = 45°$. Aus (8) ($A_1A_2\|AC$), (10) ($MA_2\|B2$) und $B2\|A1$ folgt $\sphericalangle A_1A_2M = \sphericalangle CA1 = 45°$. Man entnimmt daraus:

$$\overline{A_2Z} = \overline{ZB}_1. \tag{22}$$

Zusammenfassend erhalten wir (Abb. 3):

Satz 7. *(Sechsmittensatz) Mit einem rw. Dreieck ABC und seinen Innenecken 1, 2, 3, sind sechs Mittelpunkte (Mitten) verknüpft:*

M : *Mitte der Hypotenuse* $\overline{AB}$,

Z : *Mitte der Seitenhalbierenden* $\overline{CM}$,

A_1 : *Mitte von* $\overline{31}$,

B_1 : *Mitte von* $\overline{1B}$,

A_2 : *Mitte von* $\overline{A2}$,

B_2 : *Mitte von* $\overline{23}$,

Die sechs Mitten liegen in folgender Konstellation:

(a) *Vier Mittentripel sind kollinear:*

$$(M, B_2, A_1), (A_1, Z, A_2), (A_2, M, B_1), (B_1, B_2, Z).$$

(b) *Drei Paare von Verbindungsgeraden sind orthogonal:*

$$MB_2A_1 \perp A_2MB_1, \quad A_1B_1 \perp A_2B_2, \quad A_1ZA_2 \perp B_1B_2Z.$$

(c) *Fünf Streckenpaare sind längengleich (und deren vier sind die Katheten eines rw. Dreiecks):*

$$\overline{A_1M} = \overline{MA_2},\ \overline{B_1M} = \overline{MB_2},\ \overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2},\ \overline{B_1Z} = \overline{ZA_2},\ \overline{A_1Z} = \overline{ZB_2}.$$

(d) A_1, A_2 *liegen symmetrisch bezüglich* $M1$,
B_1, B_2 *liegen symmetrisch bezüglich* $M2$.

(e) *Das Dreieck aus drei der Mitten* A_1, B_1, A_2, B_2 *besitzt die vierte Mitte als Höhenschnittpunkt.*

Als Korollar von Satz 7 formulieren wir den in Abbildung 4 visualisierten, leicht merkbaren Satz:

Satz 8. *(Viermittensatz) In einem rw. Dreieck* ABC *mit den Innenecken 1, 2, 3, besitz jedes Dreieck aus drei Seitenmitten des Polygons* $\overline{A2} \to \overline{23} \to \overline{31} \to \overline{1B}$ *die vierte Seitenmitte als Höhenshnittpunkt.*

Bemerkungen.

1) Wegen $A_1B_1 \| B3$ (Streckung aus 1) und $A_2B_2 \| A3$ (Streckung aus 2) sind die Geraden A_1B_1 und A_2B_2 um 45° gegen die Hypotenuse AB geneigt (Abb. 3).
2) Werden – wie in Abbildung 3 – die Außenecken 4, 5, 6 in die Betrachtung einbezogen, dann erweisen sich A_1, B_1, A_2, B_2 der Reihe nach als Mitten

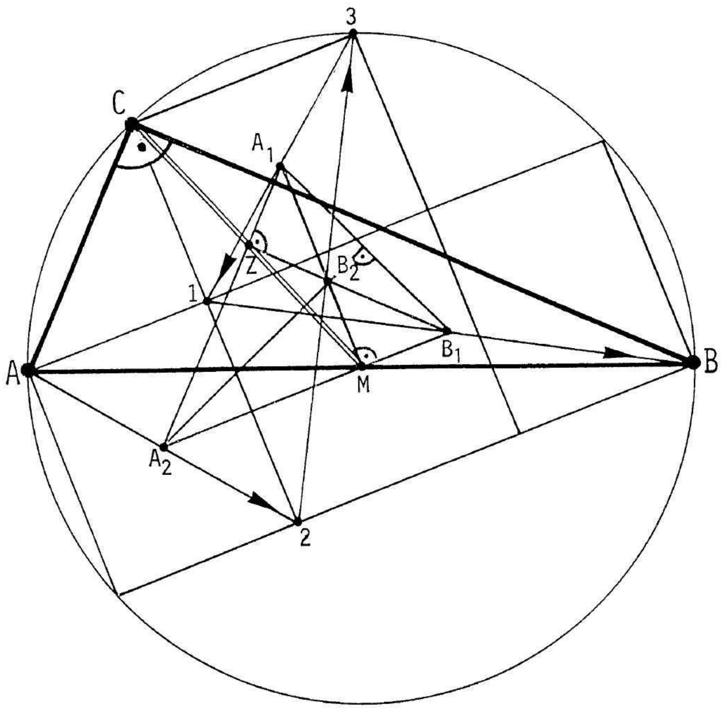

Abbildung 4

der Parallelogramme $A153$, $B516$, $A426$, $B243$ sowie der Rechtecke $1C3^*$, $12B^*$, $A12^*$, $2C3^*$ (* markiert die in Abbildung 3 nicht bezeichneten vierten Rechtecksecken).

3) In Abbildung 3 sind die Parallelogramme $A426$ und $A153$ *scherungsgleich* (und damit flächengleich) mit dem Kathetenquadrat $A4C1$ bezüglich der gemeinsamen Seite $\overline{A4}$ bzw. $\overline{A1}$. Durch die zugehörigen Scherungen wird die Quadratmitte A' auf die Parallelogrammmitte A_2 bzw. A_1 bezogen. Entsprechendes gilt für die Parallelogramme $B516, B243$, das Kathetenquadrat $B5C2$ und deren Mitten B_1, B_2 und B'. Die Mittendreiecke $A_1A'A_2$ und $B_1B'B_2$ sind rechtwinklig und gleichschenklig.

4) Ein Satz der klassischen Dreiecksgeometrie besagt: Ergänzt man die Ecken eines Dreiecks durch seinen Höhenshnittpunkt, dann besitzen jeweils drei dieser vier Punkte den vierten als Hönenschnittpunkt. Satz 8 besagt, dass bei den Mitten A_1, A_2, B_1, B_2 genau diese Situation vorliegt.

OSWALD GIERING
JOHANN-STRAUSS STR. 30.
VATERSTETTEN
D-85591

(Received November, 2008)