

5/2 (2007), 337–348

tmcs@inf.unideb.hu
http://tmcs.math.klte.hu

Teaching
Mathematics and
Computer Science

Über ähnliche Aufsatzdreiecke einer Strecke

OSWALD GIERING

Abstract. In this article we investigate (with methods of school geometry) a figure (PQ, ABC) consisting of three given similar triangles PQA, PQB, PQC with side PQ in common (Figure 1). We combine other triangles with this figure such as triangle ABC which is proved to be similar to the given triangles. The incircles of three additional triangles adjacent to triangle ABC will be determined.

Key words and phrases: similar triangles, incircles of triangles.

ZDM Subject Classification: G40.

Als Beitrag zu der seit Jahrhunderten lebendigen Elementargeometrie betrachten wir die – insgesamt drei – über einer festen Strecke PQ nach derselben Seite errichteten, gleichsinnig ähnlichen *Aufsatzdreiecke* PQA, PQB, PQC (Abb. 1) und untersuchen mit elementaren Methoden der Schulgeometrie die so definierte *Aufsatzfigur* (PQ, ABC) . Es handelt sich dabei um eine einfache Ergänzung zu der an geometrischen Aussagen reichhaltigen Theorie der Aufsatzdreiecke, die im sogenannten Satz von Napoleon ihren Anfang nahm¹.

Wir beschreiben zunächst in Abschnitt 1. die Aufsatzfigur (PQ, ABC) . In 2. beweisen wir einen *Streckensatz* (Satz 1), der die von PQ verschiedenen Seiten der Aufsatzdreiecke verknüpft. Sodann betrachten wir in 3. das *Kerndreieck*

¹Beiträge zu diesem Themenkreis finden sich in [1], S. 1216ff., [2], S. 65ff., [3], S. 324f., [4], [6], [7], S. 100f.

ABC der Aufsatzfigur. Eine kinematische Überlegung liefert in Satz 2 die Drehstreckungsgleichheit des Kerndreiecks zu den Aufsatzdreiecken. In Satz 3 werden weitere Paare drehstreckungsgleicher, in der Aufsatzfigur enthaltener, Dreiecke beschrieben. Über den Seiten des Kerndreiecks werden in 4. gewisse *Andreiecke* eingeführt, deren Inkreise mit dem Umkreis des Kerndreiecks in einer jeweils einfachen Beziehung stehen (Satz 4, Satz 5).

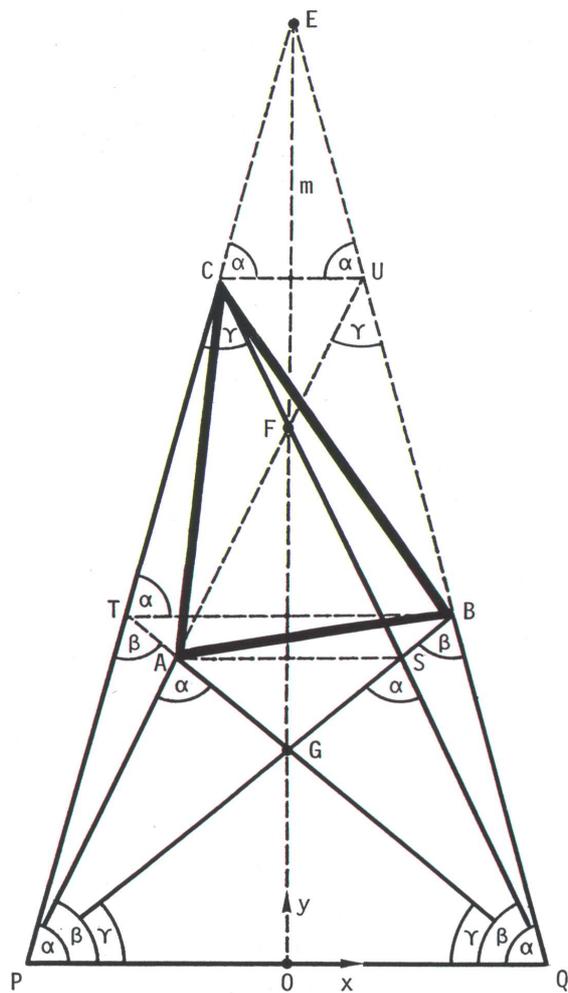


Abbildung 1

1. Beschreibung der Aufsatzfigur

Einer festen Strecke – der *Basis* PQ – seien nach derselben Seite die drei gleichsinnig ähnlichen Dreiecke PQA , PQB , PQC aufgesetzt. Die Innenwinkel dieser Aufsatzdreiecke seien (Abb. 1):

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{PQA} & \underline{PQB} & \underline{PQC} \\
 \sphericalangle QAP = \alpha & \sphericalangle PQB = \alpha & \sphericalangle CPQ = \alpha \\
 \sphericalangle APQ = \beta & \sphericalangle QBP = \beta & \sphericalangle PQC = \beta & (\alpha + \beta + \gamma = \pi). & (1) \\
 \sphericalangle PQA = \gamma & \sphericalangle BPQ = \gamma & \sphericalangle QCP = \gamma
 \end{array}$$

Im Folgenden betrachten wir den allgemeinen Fall, in dem keine zwei der Winkel α , β , γ übereinstimmen². In diesem Fall sei ohne Einschränkung $\alpha > \beta > \gamma$. Für die Aufsatzdreiecke PQA , PQB , PQC gilt dann, wenn m das Mittellot der Basis PQ bezeichnet:

$$\begin{array}{l}
 \text{In } PQA \text{ liegt } A \text{ links von } m \text{ (wegen } \beta > \gamma), \\
 \text{in } PQB \text{ liegt } B \text{ rechts von } m \text{ (wegen } \alpha > \gamma), \\
 \text{in } PQC \text{ liegt } C \text{ links von } m \text{ (wegen } \alpha > \beta).
 \end{array} \quad (2)$$

Das aus den Ecken A , B , C der Aufsatzdreiecke gebildete Dreieck ABC nennen wir das *Kerndreieck* der Aufsatzfigur (PQ, ABC). Im Hinblick auf spätere Überlegungen seien in Abbildung 1 die Punkte E , F , G des Mittellots m hervorgehoben. Es sind dies die Schnittpunkte der von P und Q auslaufenden und gegen PQ gleich geneigten (zu Geraden verlängerten) Seiten der Aufsatzdreiecke.

Spiegelt man die Aufsatzdreiecke am Mittellot m , so entsteht eine zu m symmetrische Figur. Die an m gespiegelten Ecken A , B , C seien der Reihe nach S , T , U . Beachtet man die Symmetrie zu m sowie die Parallelitäten $AS \parallel BT \parallel CU$ $CU \parallel PQ$ und die Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, so folgt für die in A , B , C und S , T , U auftretenden Winkel:

$$\begin{array}{l}
 \sphericalangle PSQ = \sphericalangle PAQ = \sphericalangle TBU = \sphericalangle BTC = \sphericalangle CUE = \sphericalangle UCE = \alpha, \\
 \sphericalangle PTQ = \sphericalangle PBQ = \sphericalangle PUC = \sphericalangle QCU = \sphericalangle ASC = \sphericalangle SAU = \beta, \\
 \sphericalangle PUQ = \sphericalangle PCQ = \sphericalangle PSA = \sphericalangle QAS = \sphericalangle QTB = \sphericalangle TBP = \gamma.
 \end{array} \quad (3)$$

²Wenn zwei der Winkel α , β , γ übereinstimmen (etwa $\beta = \gamma \neq \alpha$), entartet die Aufsatzfigur in leicht durchschaubarer Weise. Dasselbe gilt für $\alpha = \beta = \gamma (= \pi/3)$. In diesem Sonderfall liegen A , B , C auf dem Mittellot von PQ und es ist $A = B = C$.

2. Ein Streckensatz

Zur Herleitung eines Streckensatzes beziehen wir die Aufsatzfigur (PQ, ABC) auf das in Abb. 1 eingetragene xy -Koordinatensystem. Den Endpunkten der Basis PQ erteilen wir die Koordinaten $P = (-1, 0)$, $Q = (1, 0)$ und berechnen die Koordinaten der Ecken des Kerndreiecks,

$$A = (x_1, x_2), \quad B = (y_1, y_2) \quad C = (z_1, z_2), \quad (4)$$

als die Koordinaten der Geradenschnittpunkte:

$$\begin{aligned} A &= PF \cap QG, & PF: y &= \tan \beta(x + 1), & QG: y &= -\tan \gamma(x - 1), \\ B &= PG \cap QE, & PG: y &= \tan \gamma(x + 1), & QE: y &= -\tan \alpha(x - 1), \\ C &= PE \cap QF, & PE: y &= \tan \alpha(x + 1), & QF: y &= -\tan \beta(x - 1). \end{aligned} \quad (5)$$

Unter Verwendung von (5) findet man:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\sin(\gamma - \beta)}{\sin(\gamma + \beta)}, & x_2 &= 2 \frac{\sin \gamma \sin \beta}{\sin(\gamma + \beta)}, \\ y_1 &= \frac{\sin(\alpha - \gamma)}{\sin(\alpha + \gamma)}, & y_2 &= 2 \frac{\sin \alpha \sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}, \\ z_1 &= \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)}, & z_2 &= 2 \frac{\sin \beta \sin \alpha}{\sin(\beta + \alpha)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Wir formulieren nun als erste Eigenschaft der Aufsatzfigur (PQ, ABC) :

SATZ 1. Die Längen der von den Endpunkten der Basis PQ auslaufenden Seiten der Aufsatzdreiecke PQA , PQB , PQC genügen den Gleichungen:

$$PB \cdot QA = PA \cdot QC = PC \cdot QB.$$

Zum Beweis der Gleichung $PB \cdot QA = PA \cdot QC$ entnimmt man aus Abbildung 1:

$$PB = \frac{y_2}{\sin \gamma}, \quad QA = \frac{x_2}{\sin \gamma}, \quad PA = \frac{x_2}{\sin \beta}, \quad QC = \frac{z_2}{\sin \beta}. \quad (7)$$

Ersetzt man in (7) die Koordinaten x_2 , y_2 , z_2 gemäß (6), dann folgt nach elementarer Rechnung $PB \cdot QA = PA \cdot QC$. Beachtet man, daß die Aufsatzdreiecke gleichberechtigt sind, dann stellt sich nach zyklischer Vertauschung der Ecken A , B , C und Beibehaltung der allen Aufsatzdreiecken gemeinsamen Ecken P und Q die Aussage von Satz 1 ein.

3. Kinematische Betrachtungen

Es sei k' ein Kreis durch die bezüglich m symmetrisch liegenden Punkte A und S . Der Kreis k' schneidet die Gerade PS in S und einem weiteren Punkt P' sowie die Gerade QS in S und einem weiteren Punkt Q' (Abb. 2). Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sphericalangle AQ'P' &= \sphericalangle ASP' = \gamma && (k' \text{ ist Fasskreis über } AP' \text{ zum Winkel } \gamma), \\ \sphericalangle P'AQ' &= \sphericalangle P'SQ' = \alpha && (k' \text{ ist Fasskreis über } P'Q' \text{ zum Winkel } \alpha). \end{aligned}$$

Wegen $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ist $\sphericalangle AP'Q' = \beta$.

Betrachtet man durch die Punkte A und S anstelle eines festen Kreises k' alle Kreise des Kreisbüschels mit den Grundpunkten A und S , dann wird eine Schar ähnlicher Dreiecke $P'AQ'$ definiert mit fester Ecke A , mit auf PB laufender Ecke P' und auf QC laufender Ecke Q' . Die zueinander ähnlichen Dreiecke $P'AQ'$ liegen drehstreckungsgleich bezüglich A mit dem gegen AP oder AQ gemessenen Drehwinkel $\varphi := \sphericalangle PAP' = \sphericalangle QAQ'$. Die Dreiecke PAP' und QAQ' stimmen in den Winkeln φ und $\beta - \gamma$ überein und sind ebenfalls drehstreckungsgleich bezüglich A . Daher stehen die Dreieckseiten PP' und QQ' für alle Drehwinkel φ in einem konstanten Verhältnis:

$$PP' : QQ' = PA : QA = \text{const.} \tag{8}$$

Wandert bei den Drehstreckungen aus A der auf PB laufende Punkt P' nach B , so ist in (8) $P' = B$. Mit Satz 1 folgt $Q' = C'$. Damit inzidiert das laufende Dreieck $P'AQ'$ mit dem Kerndreieck ABC und es gilt:

$$\sphericalangle P'AQ' = \sphericalangle BAC = \alpha, \quad \sphericalangle AP'Q' = \sphericalangle ABC = \beta, \quad \sphericalangle P'Q'A = \sphericalangle BCA = \gamma. \tag{9}$$

Da die Aufsatzdreiecke PQA , PQB , PQC nicht gegeneinander ausgezeichnet sind, läßt sich nicht allein das Dreieck PQA mit den beschriebenen Drehstreckungen um A in das Kerndreieck ABC überführen, sondern auch das Dreieck PQB mit entsprechenden Drehstreckungen um B und das Dreieck PQC mit entsprechenden Drehstreckungen um C . Neben das Kreisbüschel mit den Grundpunkten A und S treten dann die Kreisbüschel mit den Grundpunkten B und T bzw. C und U .

Zusammenfassend erhalten wir:

SATZ 2. In der Aufsatzfigur (PQ, ABC) gilt (Abb. 2):

- (a) Das Aufsatzdreieck PQA (PQB bzw. PQC) ist drehstreckungsgleich zum Kerndreieck ABC bezüglich A (B bzw. C) als Zentrum der Drehstreckung.

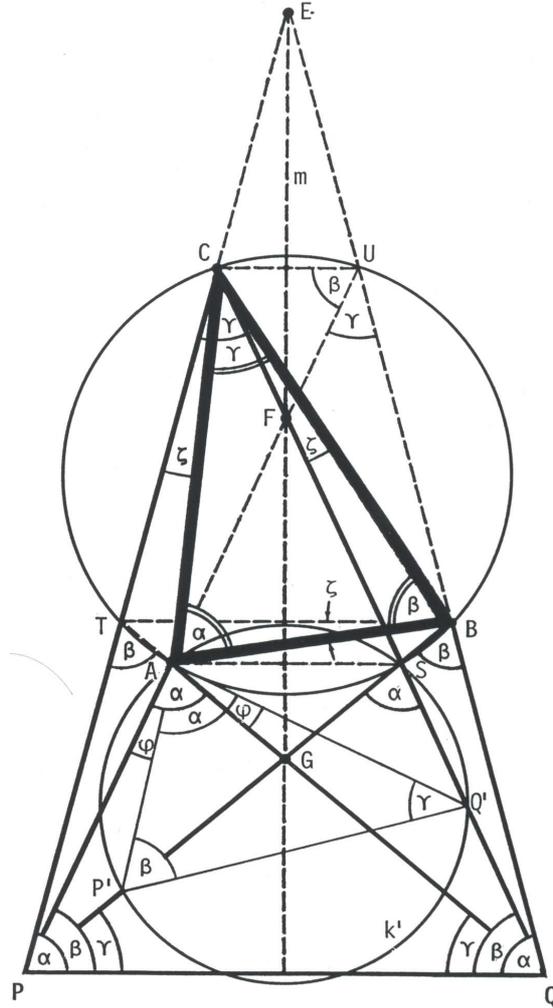


Abbildung 2

(b) Für jeden Kreis k' durch die Punkte A und S ist das Dreieck $P'AQ'$ drehstreckungsgleich zum Aufsatzdreieck PQA und zum Krendreieck ABC . Entsprechendes gilt für jeden Kreis durch die Punkte B und T bzw. C und U .

Wir erwähnen in der Aufsatzfigur (PQ, ABC) weitere drehstreckungsgleiche Dreiecke und bemerken zunächst: Die Dreieckseiten CA und CB mit $\sphericalangle ACB = \gamma$

und die Dreieckseiten CP und CQ mit $\sphericalangle PCQ = \gamma$ sind um C durch den Winkel $\zeta := \sphericalangle PCA = \sphericalangle QCB$ gegeneinander gedreht. Man erhält damit:

SATZ 3. In der Aufsatzfigur (PQ, ABC) gilt (Abb. 2):

(a) Die Dreiecke PAB und QAC stimmen in den Winkeln

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle AQC = \beta - \gamma \quad \text{und} \quad \sphericalangle PBA = \sphericalangle QCA = \gamma - \zeta$$

überein und sind drehstreckungsgleich bezüglich A als Zentrum der Drehstreckung.

(b) Die Dreiecke PBC und QBA stimmen in den Winkeln

$$\sphericalangle BCP = \sphericalangle BAQ = \gamma + \zeta \quad \text{und} \quad \sphericalangle BPC = \sphericalangle BQA = \alpha - \gamma$$

überein und sind drehstreckungsgleich bezüglich B als Zentrum der Drehstreckung.

(c) Die Dreiecke PCA und QCB stimmen in den Winkeln

$$\sphericalangle PCA = \sphericalangle QCB = \zeta \quad \text{und} \quad \sphericalangle CPA = \sphericalangle CQB = \alpha - \beta$$

überein und sind drehstreckungsgleich bezüglich C als Zentrum der Drehstreckung.

4. Die Andreiecke des Kerndreiecks

Mit dem Kerndreieck ABC lassen sich die an seine Seiten AB , BC , CA angrenzenden Dreiecke (kurz: *Andreiecke*) ABG , BCE , CAF verknüpfen (Abb. 3). Bei ihrer Untersuchung dienen die Schnittpunkte des Mittellots m der Basis PQ mit dem Umkreis des Kerndreiecks ABC als Hilfspunkte; sei V der obere und W der untere Schnittpunkt (kurz: V der *Hochpunkt*, W der *Tiefpunkt* des Umkreises).

Wir betrachten zunächst das Andreieck ABG mit dem Teildreieck ABW und verwenden die Winkel:

$$\xi := \sphericalangle BAG, \quad \eta := \sphericalangle ABG, \quad \delta := \sphericalangle BAW, \quad \varepsilon := \sphericalangle ABW. \quad (10)$$

Wir beachten, daß gilt:

Der Umkreis des Kerndreiecks ABC ist der Fasskreis für den Winkel β über der Sehne AC ; folglich ist $\sphericalangle AWC = \sphericalangle ABC = \beta$.

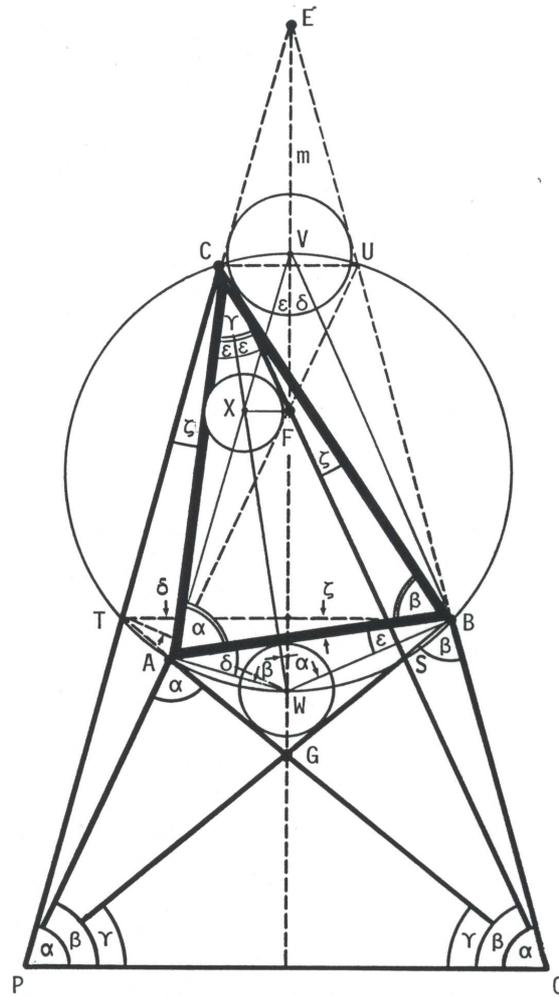


Abbildung 3

Der Umkreis des Kerndreiecks ABC ist auch der Fasskreis für den Winkel α über der Sehne BC ; folglich ist $\sphericalangle BWC = \sphericalangle BAC = \alpha$. Man erhält dann:

$$\sphericalangle AWB = \alpha + \beta = \pi - \gamma. \quad (11)$$

Im Dreieck ABW ist somit die Summe der Innenwinkel

$$(\pi - \gamma) + \delta + \varepsilon = \pi, \text{ also } \delta + \varepsilon = \gamma. \quad (12)$$

Im gleichschenkligen Dreieck PGQ findet man $\sphericalangle PGQ = \sphericalangle AGB = \pi - 2\gamma$. Im Andreieck ABG ist somit die Summe der Innenwinkel

$$(\pi - 2\gamma) + \xi + \eta = \pi, \text{ also } \xi + \eta = 2\gamma. \quad (13)$$

Aus (12) und (13) folgt

$$(\xi - 2\delta) + (\eta - 2\varepsilon) = 0. \quad (14)$$

Wir beachten nun: Der Umkreis des Kerndreiecks ABC ist der Fasskreis für den Winkel δ über der Sehne WB . Daher ist $\sphericalangle WTB = \delta$. Wegen der Symmetrie des Dreiecks TWB zum Mittellot m der Basis PQ ist $\sphericalangle WTB = \sphericalangle WBT = \delta$.

Wir beachten weiter: Der Umkreis des Kerndreiecks ABC ist der Fasskreis für den Winkel $\zeta := \sphericalangle TCA = \sphericalangle TBA = \sphericalangle BAS$.

Nun gilt im Dreieck PAC einerseits

$$\sphericalangle PAC = \pi - \zeta - (\alpha - \beta) \quad (15)$$

und andererseits

$$\sphericalangle PAC = 2\pi - 2\alpha - \xi. \quad (16)$$

Aus (15) und (16) folgt

$$\xi = \gamma + \zeta. \quad (17)$$

Ersetzt man in (17) den Winkel ζ durch $\zeta = \sphericalangle TBA = \delta - \varepsilon$, so folgt

$$\xi = 2\delta. \quad (18)$$

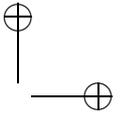
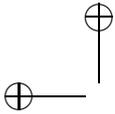
Nach (18) ist im Andreieck ABG die Gerade AW die Innenwinkelhalbierende in A . Da die Dreieckseiten AG und BG zum Mittellot $m = GW$ der Basis PQ symmetrisch liegen, ist GW im Andreieck ABG die Innenwinkelhalbierende in G . Als Schnittpunkt zweier Innenwinkelhalbierenden ist W der *Inkreismittelpunkt des Andreiecks ABG* .

Im Andreieck BCE halbieren die Geraden BV , CV und EV die Innenwinkel. Der Hochpunkt V des Umkreises des Kerndreiecks ABC ist folglich der *Inkreismittelpunkt des Andreiecks BCE* .

Wir erhalten:

SATZ 4. In der Aufsatzfigur (PQ, ABC) gilt (Abb. 3):

- (a) Der Tiefpunkt W des Umkreises des Kerndreiecks ABC ist der Inkreismittelpunkt des Andreiecks ABG .
- (b) Der Hochpunkt V des Umkreises des Kerndreiecks ABC ist der Inkreismittelpunkt des Andreiecks BCE .



In dem noch ausstehenden Andreieck CAF gilt:

Die Geraden AF und CF sind neigungsgleich gegen die Basis PQ ; die PQ -Parallele durch F halbiert daher den Winkel $\sphericalangle CFA$.

Die Gerade CW halbiert den Winkel $\sphericalangle ACF$. Zum Beweis notieren wir: Im Dreieck ACW gilt:

$$\sphericalangle ACW + (\alpha + \delta) + \beta = \pi. \text{ Wegen } \alpha + \beta + \gamma = \pi \text{ folgt } \sphericalangle ACW = \gamma - \delta. \quad (19)$$

Im Dreieck BCW gilt:

$$(\sphericalangle WCF + \zeta) + (\beta + \varepsilon) + \alpha = \pi. \text{ Wegen } \alpha + \beta + \gamma = \pi \text{ folgt } \sphericalangle WCF = \gamma - (\zeta + \varepsilon). \quad (20)$$

Addiert man in (12) auf beiden Seiten der Gleichung $\gamma = \delta + \varepsilon$ den Winkel δ , so folgt:

$$\delta = 2\delta - \gamma + \varepsilon \stackrel{(18)}{=} \xi - \gamma + \varepsilon \stackrel{(17)}{=} \zeta + \varepsilon. \quad (21)$$

Mit (21) liefern (19) und (20): $\sphericalangle ACW = \sphericalangle WCF$. Die Gerade CW halbiert also den Winkel $\sphericalangle ACF$ und schneidet folglich die PQ -Parallele durch F im *Inkreismittelpunkt* X des Andreiecks CAF .

Wir beachten schließlich in der Aufsatzfigur (PQ, ABC) die Winkelgleichheiten:

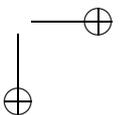
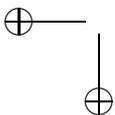
$$\sphericalangle CAV = \sphericalangle CWV = \sphericalangle UWV = \sphericalangle UAV = \sphericalangle FAV. \quad (22)$$

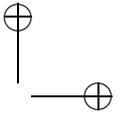
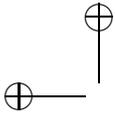
Zum Beweis interpretiere man den Umkreis des Kerndreiecks ABC als Fasskreis und verwende, daß die Winkel $\sphericalangle CWV$ und $\sphericalangle UWV$ zum Mittellot m der Basis PQ symmetrisch liegen. Nach (22) halbiert die Gerade AV den Winkel $\sphericalangle CAF$ und läuft daher durch den *Inkreismittelpunkt* X des Andreiecks CAF .

Wir erhalten:

SATZ 5. *In der Aufsatzfigur (PQ, ABC) gilt (Abb. 3): Der Inkreismittelpunkt X des Andreiecks CAF ist der Schnittpunkt der Geraden AV und CW ; V ist der Hochpunkt, W der Tiefpunkt des Umkreises des Kerndreiecks ABC .*

Bemerkung. Das Mittellot m der Basis PQ halbiert im Andreieck ABG den Winkel $\sphericalangle AGB$, im Andreieck BCE den Winkel $\sphericalangle BEC$, jedoch nicht im Andreieck CAF den entsprechenden Winkel $\sphericalangle CFA$. Insofern sind die Andreiecke ABG , BCE , CAF nicht gleichberechtigt. Ein Licht auf diese Situation wirft das Axiom von Pasch. Es besagt anschaulich – angewandt auf das Mittellot m – nach [5], S. 5: *Wenn m (in einem Punkt zwischen A und B als Halbierende des Winkels $\sphericalangle AGB$) ins Innere des Kerndreiecks ABC eintritt, dann tritt m auch wieder heraus (in*





der Aufsatzfigur in einem Punkt zwischen B und C als Halbierende des Winkels $\sphericalangle BEC$). Das Mittellot m kann dann das Innere des Kerndreiecks ABC nicht auch noch in einem Punkt zwischen C und A verlassen, kann also den Winkel $\sphericalangle CFA$ nicht halbieren. Dies besorgt die zu m orthogonale Gerade durch F .

5. Ein Kopunktalitätssatz

Wir betrachten abschließend die drei Schwerlinien der Aufsatzdreiecke PQA , PQB , PQC , die jeweils den Scheitel ihres Innenwinkels σ ($\sigma \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$) enthalten; wir nennen diese Schwerlinien die σ -*Schwerlinien* der Aufsatzdreiecke. Ermittelt man aus den in Abschnitt 2 angegebenen Koordinaten der Punkte O , P , Q und A , B , C (siehe (6)) die Gleichungen der σ -Schwerlinien und testet man ihre Kopunktalität, so folgt

SATZ 6. *In der Aufsatzfigur (PQ, ABC) sind die drei σ -Schwerlinien der Aufsatzdreiecke PQA , PQB , PQC für $\sigma \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ jeweils kopunktal.*

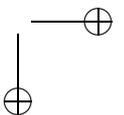
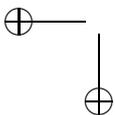
Bemerkung. Betrachtet man die in O kopunktalen Schwerlinien OA , OB , OC der Aufsatzdreiecke sowie deren Schwerpunkte $S_A \in OA$, $S_B \in OB$, $S_C \in OC$, dann besteht nach einer elementaren Schwerpunkteigenschaft das Streckenverhältnis

$$OS_A : OA = OS_B : OB = OS_C : OC = 1 : 3.$$

Folglich bilden die Schwerpunkte S_A , S_B , S_C der Aufsatzdreiecke PQA , PQB , PQC ein zum Kerndreieck ABC zentrisch ähnliches Dreieck mit dem Ähnlichkeitszentrum O .

Literatur

- [1] G. Berkhan, W. Fr. Meyer, Neuere Dreiecksgeometrie, in: *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. 3, AB9, Teubner Leipzig (1914–1931), 1173–1276.
- [2] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Zeitlose Geometrie*, Klett Stuttgart, 1983.
- [3] J. Fischer, *Napoleon und die Naturwissenschaften*, Steiner Stuttgart, 1988.
- [4] O. Giering, Zur Theorie der Aufsatzdreiecke, *IBDG* **26** (2007), 34–41.
- [5] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 8. Aufl., Teubner Stuttgart, 1956.
- [6] H. Martini, On the theorem of Napoleon and related topics, *Math. Semesterberichte* **43** (1996), 47–64.



- [7] H. Schaal, Ein Beitrag zur Geometrie ähnlich veränderlicher Felder, *El. Math.* **21** (1966), 97–109.

OSWALD GIERING
TU MÜNCHEN, ZENTRUM MATHEMATIK
D-85748 GARCHING
UND
JOHANN-STRAUSS-STR. 30
D-85591 VATERSTETTEN
DEUTSCHLAND

(Received May, 2007)