

5/2 (2007), 299–315

tmcs@inf.unideb.hu  
http://tmcs.math.klte.hu

**Teaching**  
Mathematics and  
Computer Science

## Charakteristische Dreieckspunkte in der projektiv-erweiterten hyperbolischen Ebene

ANA SLIEPČEVIĆ und IVANKA BABIĆ

*Abstract.* Some basic planimetric constructions regarding segments, angles and triangles are shown in the Cayley-Klein model of the hyperbolic plane. Relationship with the situation in the Euclidean plane is given. H-triangles are classified considering the location of their vertices and sides with respect to the absolute. There are 28 types of triangles. It is shown that there exist 12 pairs of dual triangles, while 4 types of triangles are dual to themselves. For every type of triangle the existence and number of the characteristic points are determined. Few examples of triangles with construction of their characteristic points, incircles and circumcircles are given.

*Key words and phrases:* Cayley-Klein model of the hyperbolic plane, classification of H-triangles, dual triangles, characteristic points of the triangle.

*ZDM Subject Classification:* G45, G55, G85.

### Einleitung

Um die verschiedenen planimetrischen Konstruktionen in der projektiv-erweiterten hyperbolischen Ebene (i.w. H-Ebene) zu erklären, kann man ein projektives Modell dieser Ebene verwenden. Eines der günstigsten ist das Cayley-Kleinsche Modell in der projektiv-abgeschlossenen euklidischen Ebene, wo die planimetrischen Konstruktionen mittels euklidischer Werkzeuge ausführbar sind. In unserer Arbeit verzichten wir auf alle axiomatischen Feinheiten und höhergeometrische Aspekte. Viele Beziehungen und andere Themen findet man in klassischen und modernen Büchern in unserem Literaturverzeichnis [3], [4], [5], [6].

Den Aufbau der projektiven Einbettung kann man vom Buch [3] studieren. Eine kurze Zusammenfassung ist in der Arbeit [8] zu finden. Da im konstruktiven Sinn nur reelle Lösungen interessant sind, werden nur solche in Betracht kommen.

Der euklidische Kreis  $a$  repräsentiert den absoluten (fundamentalen) Kegelschnitt des Cayley-Kleinschen Modells der H-Ebene. Alle Punkte im Inneren des fundamentalen Kegelschnittes heißen *eigentliche Punkte*, die Punkte an dem absoluten Kegelschnitt bzw. im Äußeren heißen *Grenzpunkte* bzw. *Idealpunkte* oder beide heißen die *uneigentlichen Punkte* der H-Ebene.

Zwei Punkte beliebiger Art der H-Ebene bestimmen eine einzige Gerade, die als *eigentliche*, bzw. *ideale* bzw. *Grenzgerade* zu nennen ist, je nach dem ob sie den absoluten Kegelschnitt in einem reellen Punktepaar schneidet, bzw. mit ihm keinen gemeinsamen Punkt hat, bzw. ihn berührt. Zwei Geraden mit eigentlichem Schnittpunkt heißen *kreuzende Geraden*, diejenigen mit einem Grenzschnittpunkt sind *parallel* und die Geraden mit idealem Schnittpunkt heißen *hyperparallele* Geraden.

Eine grundlegende Rolle spielt die absolute H-Polarität (H-Dualität), die den Geraden  $x, y, z, \dots$  als Polaren die Punkte  $X, Y, Z, \dots$  als (absolute) *Pole* in der H-Ebene zuordnet, sodass gilt: wenn  $x \rightarrow X$  und  $y \rightarrow Y$ , dann  $XY = z \rightarrow Z = x \cap y$ . Durch die absolute Polarität erklärt man die H-Orthogonalität der Geraden. Zwei Geraden  $x, y$  stehen senkrecht zueinander wenn  $X \in y$  und  $Y \in x$  gilt.

Mit Hilfe der Konstruktionen von Strecken- bzw. Winkelsymmetralen werden in diesem Arbeit *charakteristische* Dreieckspunkte (*merkwürdige* Dreieckspunkte) erklärt und es wird eine Klassifizierung aller Dreiecke hinsichtlich Existenz und Lage dieser Charakteristischen Dreieckspunkte gegeben.

Als didaktische Motivation sollte man die Analogie zur Euklidischen Geometrie betonen. Die so gewonnene Ideen führen zur reichhaltigen “neuen anderen Welt” von János Bolyai und Nikolaj I. Lobatschewski.

## 1. Der Streckenbegriff

Zwei beliebige Punkte einer projektiven Geraden bestimmen ein Streckenpaar. Seien mit  $e, i, g$  eine eigentliche, ideale bzw. Grenzgerade und mit  $E, I, G$  ein eigentlicher, idealer bzw. Grenzpunkt bezeichnet. Es ist nicht schwer zu sehen, dass in Abhängigkeit vom Typ der Streckenendpunkte und der Lage der Trägergeraden im Bezug auf den absoluten Kegelschnitt  $a$  in der H-Ebene neun Typen von Strecken existieren (siehe die Tabelle 1). Im konstruktiven Sinn sind

zunächst nur Strecken vom Typ  $d_1, d_6, d_8$  und  $d_9$  interessant, weil nur solche Strecken reelle Symmetralen besitzen.

Tabelle 1

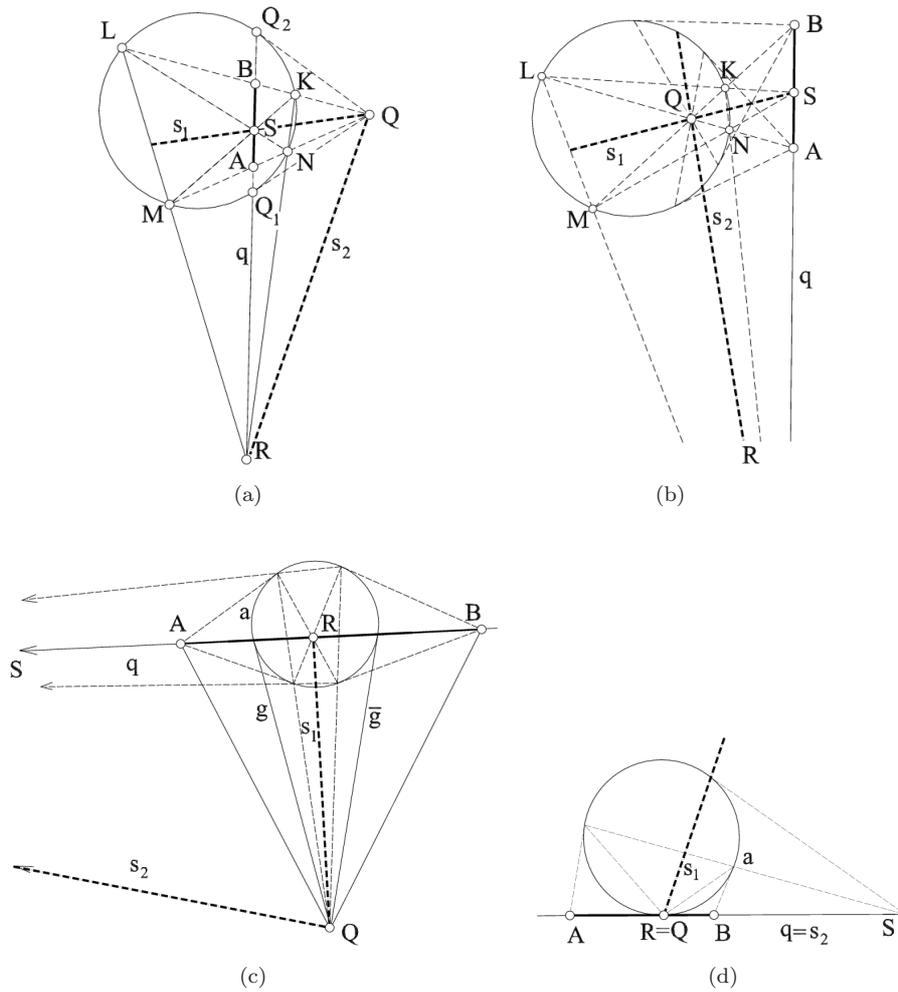
Streckentypen	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_5$	$d_6$	$d_7$	$d_8$	$d_9$
Trägergerade	<b>e</b>	e	e	e	e	<b>e</b>	g	<b>g</b>	<b>i</b>
Endpunkte	<b>E, E</b>	E, G	E, I	G, I	G, G	<b>I, I</b>	G, I	<b>I, I</b>	<b>I, I</b>

### 1.1. Mittelpunkt und Symmetrale der Strecke

Bekanntlich, besitzt eine Strecke in der euklidischen Ebene einen einzigen Mittelpunkt und eine einzige Symmetrale. Demgegenüber besitzt eine Strecke in der H-Ebene entweder zwei oder keinen, bzw. in speziellen Fällen einen formalen oder unendlich viele Mittelpunkte. Ebenso besitzt sie entweder zwei oder keine, bzw. eine formale oder unendlich viele Symmetralen. Es haben nämlich, Strecken mit zwei Grenzpunkten unendlich viele Mittelpunkte und durch jeden von diesen eine H-orthogonale Symmetrale. Wenn die Strecke einen Endpunkt im Grenzpunkt hat, so kann man ihn als formalen Mittelpunkt und seine Grenzgerade als formale Symmetrale auffassen. Mittelpunkte einer Strecke von anderen Typen werden durch solche zwei absolut konjugierte Punkte  $S$  und  $R$  auf ihrer Trägergeraden  $q$  definiert, die zusammen mit den Streckenendpunkten  $A$  und  $B$  ein harmonisches Quadrupel bilden [1], [4]. Dabei sind die Endpunkte  $A, B$  der Strecke und die absoluten Schnittpunkte der Trägergeraden  $q \cap a = Q_1, Q_2$  zwei involutorisch zugeordnete Punktepaare der Geradeninvolution  $(q)$  und die Doppelpunkte  $S$  und  $R$  dieser Involution stellen die Streckenmittelpunkte dar (Fig. 1). Von anderem Gesichtspunkt handelt es sich um einer Geradeninvolution  $(q)$ , die in der Geraden  $q$  durch jenes Kegelschnittbüschel induziert wird, das durch den fundamentalen Kegelschnitt  $a$  und das Geradenpaar  $QA, QB$  bestimmt wird. Dabei ist der Punkt  $Q$  der absolute Pol der Geraden  $q$ . Daraus folgt, daß ein Streckenpaar in der H-Ebene nur dann reelle Mittelpunkte besitzt, wenn die erwähnte Involution des Streckenträgers hyperbolisch ist, also genau dann, wenn beide Streckenendpunkte entweder eigentliche oder ideale Punkte sind. Sonst nicht. Das sind also genau die Strecken des Typs  $d_1, d_6, d_8, d_9$  in der Tabelle 1.

In Fig. 1 sind einige Konstruktionen des Mittelpunktspaars der erwähnten Streckentypen gegeben. Um die Symmetralen und die Mittelpunkte der Strecke  $AB \in q$  zu bestimmen, wurde an der Fig. 1(a) und 1(b) ein gewisses in den absoluten Kegelschnitt eingeschriebenes Viereck  $KLMN$  konstruiert. Dieses Viereck

besitzt im absoluten Pol  $Q$  der Geraden  $q$  einen der Diagonalepunkte und es hat die Verbindungsgeraden  $QA, QB$  als gegenüberliegendes Seitenpaar. Die andere beiden Diagonalepunkte dieses Vierecks sind die gesuchte Mittelpunkte  $R$  und  $S$  des gegebenen Streckenpaares  $AB$  bzw.  $BA$  [2].



Figur 1. Streckensymmetralen

Die Verbindungsgeraden  $QS = s_1$  und  $QR = s_2$  bilden im Bezug auf den absoluten Kegelschnitt ein konjugiertes Geradenpaar, das heißt sie sind H-orthogonal

zueinander und zur Geraden  $q$ . Man beachte, dass diese Geraden  $s_1$  und  $s_2$  auch die Doppelgeraden des involutorischen Geradenbüschels ( $Q$ ) sind und die Symmetralen des Streckenpaares  $AB$  darstellen. Diese Tatsache ermöglicht eine Konstruktion des Symmetralenpaares  $s_1, s_2$ , wie auch des Mittelpunktpaares einer Strecke  $AB \in q$  des Typs  $d_6$  mit idealen Endpunkten an einer eigentlichen Trägergeraden  $q$  (Fig. 1(c)). Die Streckensymmetralen wurden als die Doppelgeraden des involutorischen Geradenbüschels ( $Q$ ) konstruiert. Die zwei involutorisch zugeordnete Geradenpaare der Geradeninvolution ( $Q$ ) sind die Verbindungsgeraden  $QA, QB$  und die zwei durch den Punkt  $Q$  gehenden absoluten Berührungsgерaden  $g, \bar{g}$ . Die Symmetralen  $s_1, s_2$  in Fig. 1(c) wurden als die Doppelgeraden dieser Involution bestimmt [2]. Die zwei Schnittpunkte  $q \cap s_1 = R$  und  $q \cap s_2 = S$  sind die Mittelpunkte der Strecke  $AB$ .

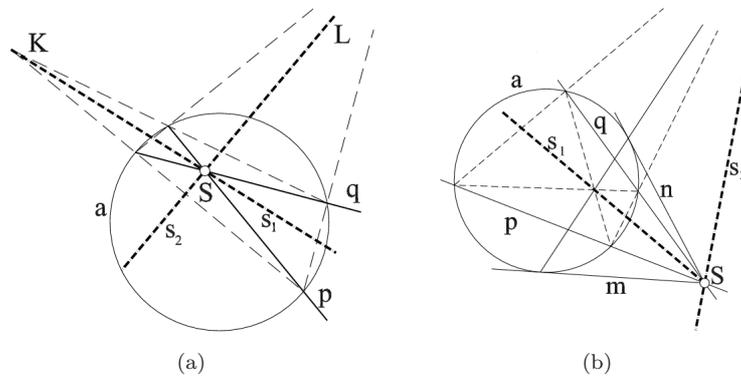
Einer der beiden Mittelpunkte eines Streckenpaares  $AB$  des Typs  $d_8$  also einer Grenzgeraden  $q$ , liegt immer in ihrem absoluten Berührungspunkt  $R = Q$  (Fig. 1(d)). Den anderen Mittelpunkt  $S$  bestimmt man als den zweiten Doppelpunkt der Geradeninvolution ( $q$ ) die durch das Punktepaar  $A, B$  und den Doppelpunkt  $R$  bestimmt ist. Obwohl das Streckenpaar  $AB$  in diesem Fall zwei Mittelpunkte besitzt, existiert nur eine Symmetrale, weil die andere mit der Geraden  $q$  zusammenfällt (es gibt nämlich nur eine einzige involutorische Kollineation, die  $A$  und  $B$  vertauscht).

## 2. Winkelsymmetralen

Nach der Definition der Winkelsymmetralen eines Geradenpaares  $p, q \in (S)$  in der H-Ebene sind jene beiden absolut konjugierten den Schnittpunkt  $S$  enthaltenden Geraden  $s_1, s_2 \in (S)$  zu konstruieren, die zusammen mit  $p$  und  $q$  ein harmonisches Quadrupel bilden (Fig. 2(a),2(b)) [2]. Im Vergleich mit der euklidischen Ebene, in der jedes unparallele Geradenpaar einheitlich zwei orthogonalen Winkelsymmetralen besitzt, sind in der H-Ebene eine Reihe von Fällen zu unterscheiden. Zwei Geraden verschiedenen Typs haben natürlich keine Symmetrale. Zwei eigentliche Geraden mit gemeinsamem Grenzpunkt haben eine eigentliche Symmetrale, als Achse einer involutorischen Kollineation von  $a$ , die die Geraden einander zuordnet, obwohl man die Grenzgerade zum gemeinsamen Grenzpunkt auch als Symmetrale betrachten kann. Zwei eigentliche Geraden mit einem eigentlichen Schnittpunkt bzw. zwei ideale Geraden haben zwei Symmetralen, zwei Grenzgeraden haben aber unendlich viele Symmetralen. Wegen der Dualität zu den Strecken mittels der absoluten H-Polarität entspricht die Klassifikation der

Winkelsymmetralen von Geradenpaaren der Streckensymmetralen von Streckenpaaren (siehe auch Fig. 1(a), 1(b), 1(c), 1(d)).

Die Konstruktion der Winkelsymmetralen im Fall des eigentlichen Geradenpaars mit eigentlichem oder idealem Schnittpunkt kann z.B. auf folgender Weise ausgeführt werden. Die gegebenen Geraden  $p, q$  betrachtet man als ein gegenüberliegendes Seitenpaar eines in den absoluten Kegelschnitt eingeschriebenen Viereit, und den Schnittpunkt  $S = p \cap q$  als einen der drei Diagonalpunkte [2]. Die gesuchten Winkelsymmetralen  $s_1$  und  $s_2$  durch  $S$  in der Fig. 2(a), 2(b) konnten als die Doppelgeraden eines involutorischen Geradenbüschels ( $S$ ) gefunden werden. Diese Involution ist durch das involutorisch zugeordnete Geradenpaar  $p, q$  und das Grenzgeradenpaar  $m, n$  durch  $S$  festgelegt. Diese Tatsache ermöglicht die Konstruktion der Winkelsymmetralen auch im Fall des idealen Geradenpaars. Die Konstruktion in diesem Fall verläuft im wesentlichen dual zur Konstruktion der Streckensymmetrale in der Fig. 1(c). Eine der zwei Winkelsymmetralen im Fall eines eigentlichen Geradenpaars durch einen Grenzschnittpunkt  $S$  inzidiert mit der Grenzgeraden  $s_1$ . Diese Grenzgerade als Doppelgerade und das Geradenpaar  $p, q$  ermöglichen die Konstruktion der zweiten Doppelgeraden bzw. der zweiten Winkelsymmetralen  $s_2$  als vierte Harmonische zu den genannten drei Geraden.



Figur 2. Winkelsymmetralen

### 3. Dreiecke

Hinsichtlich des Typs der Eckpunkte lassen sich in der H-Ebene zehn Klassen von Dreiecken unterscheiden [4]. Zusätzlich muss bei einer vollständigen Typeneinteilung auch die Lage der Seiten des Dreiecks zum absoluten Kegelschnitt berücksichtigt werden, d.h. es sind dual auch die Dreiseite mit zu klassifizieren. In diesem Betracht existieren 28 Dreieckstypen (siehe die Tabelle 2). Zu jedem Dreieck existiert ein zu ihm H-polares (duales) Polardreieck. Dabei stehen zwölf Paare der Dreieckstypen einander dual gegenüber, und vier (7, 13, 15, 19) sind sich selbst dual zugeordnet.

Außer dieser i.w. projektiven Typisierung hinsichtlich des Ecken- und Seitentyps kann man eine verfeinerte H-metrische Klassifizierung der Dreiecke in der H-Ebene auch hinsichtlich der Existenz und Lage der charakteristischen Dreieckspunkte (das Orthozentrum, die Schwerpunkte, die Umkreiszentren und die Berührungszentren) betrachten.

Auf Grund einer solchen Klassifizierung entsteht die Tabelle 2, in der mit  $e, i, g$  bzw. mit  $E, I, G$  die eigentliche, ideale und Grenzgerade, bzw. die eigentliche, ideale und Grenzeckpunkte der Dreiecke bezeichnet sind.

Unter diesen Dreieckstypen sind insbesondere jene besonders interessant, die mindestens eine Grenzecke, bzw. eine Grenzseite besitzen. Diese sind sogenannte *asymptotische* Dreiecke. Einige von ihnen sind asymptotisch (ein- oder mehrmals) im Bezug auf die Ecke, einige im Bezug auf die Seiten, und einige im Bezug auf beide (siehe die Tabelle 2).

Jedes Dreieck, außer die Typen 13, 7, besitzt ein einziges Orthozentrum. Nämlich, die Orthogonalität in der H-Ebene wird durch die absolute Polarität definiert und aus jedem Punkt der Ebene kann die einzige Normale zu jeder Geraden ziehe. Jedes Dreieck (außer 13 und 7) besitzt also drei eindeutig bestimmte Höhen, die durch einen einzigen Punkt, eben das Orthozentrum, laufen. Für Dreiecke des Typs 13 kann man sagen, daß durch seine ideale Ecke unendlich viele Höhen laufen bzw. durch diese Ecke keine Höhe bestimmt ist. Unter allen Dreiecken des Typs 7 ist speziell das Poldreieck herausragend (jede Ecke ist der absolute Pol der gegen überliegenden Seite). Da jede Gerade durch eine Ecke dieses Dreiecks senkrecht zur gegenüberliegenden Seite steht, kann man jeden Punkt der H-Ebene als Orthozentrum solches Dreiecks annehmen. Dieses Dreieck besitzt also kein Orthozentrum.

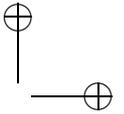
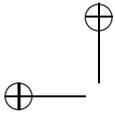
Im Allgemeinen treten viele Unterschiede im Vergleich zu Dreiecken der euklidischen Ebene auf. Wie bekannt besitzt jedes Dreieck der euklidischen Ebene ein

Tabelle 2

	Ecken-Seiten	Dual	Ortho- zentrum	Schwer- punkt	Umkreis	In-, Ankreis
1.	E, E, E - e, e, e	28	1	4	4	4
2.	E, E, G - e, e, e	27	1	1	2	2
3.	E, G, G - e, e, e	26	1	$\infty$	1	1
4.	E, E, I - e, e, e	23	1	0	0	4
5.	E, I, I - e, e, e	22	1	0	0	4
6.	E, I, I - e, e, g	17	1	0	0	2
7.	E, I, I - e, e, i	s.d.	1, 0	0	0	0
8.	E, G, I - e, e, e	24	1	0	0	2
9.	E, G, I - e, e, g	18	1	0	0	0
10.	G, G, G - e, e, e	25	1	0	Absolute	1
11.	G, G, I - e, e, e	21	1	$\infty$	1	1
12.	G, G, I - e, e, g	16	1	$\infty$	0	0
13.	G, G, I - e, g, g	s.d.	0, $\infty$	$\infty$	0	0
14.	G, I, I - e, e, e	20	1	1	2	2
15.	G, I, I - e, e, g	s.d.	1	1	0	0
16.	G, I, I - e, g, g	12	1	1	0	0
17.	G, I, I - e, e, i	6	1	1	2	0
18.	G, I, I - e, g, i	9	1	1	0	0
19.	I, I, I - e, e, e	s.d.	1	4	4	4
20.	I, I, I - e, e, g	14	1	4	2	2
21.	I, I, I - e, g, g	11	1	4	1	1
22.	I, I, I - e, e, i	5	1	4	4	0
23.	I, I, I - e, i, i	4	1	4	4	0
24.	I, I, I - e, g, i	8	1	4	2	0
25.	I, I, I - g, g, g	10	1	4	1	Absolute
26.	I, I, I - g, g, i	3	1	4	1	1
27.	I, I, I - g, i, i	2	1	4	2	2
28.	I, I, I - i, i, i	1	1	4	4	4

s.d. = selbst dual

einziges Orthozentrum, einen Schwerpunkt, ein Umkreiszentrum, ein Inkreiszentrum und drei Ankreiszentren. Aus der Existenz der zwei Streckenmittelpunkte,



der zwei Streckensymmetralen und der zwei Winkelsymmetralen schließt man, dass ein Dreieck in der H-Ebene im allgemeinen vier Schwerpunkte<sup>1</sup>, vier Umkreise, wie auch vier Berührungskreise besitzt. Speziell, die Dreieckstypen 2, 14, 15, 16, 17, 18 besitzen einen, die Typen 3, 11, 12, 13 unendlich viele Schwerpunkte, und die Dreieckstypen 4–10 keinen Schwerpunkt. Weiter sieht man, daß nur drei der Dreieckstypen (1, 19, 28) alle charakteristischen Punkte besitzen. Es ist auch wichtig zu bemerken, daß vier Schwerpunkte nur bei solchen Dreiecken auftreten, die nur eigentliche oder nur ideale Ecken besitzen, also bei den Typen (1, 19–28).

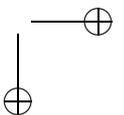
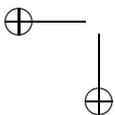
Aus der Tabelle 2 sieht man, daß jedem Dreieckstyp sein duales Dreieck zugeordnet wird. Wie schon bemerkt, sind die Dreiecke des Typs 7, 13, 15, und 19 sich selbst dual zugeordnet. Wie man leicht sieht, der Zahl der Umkreise eines Dreiecks entspricht dem Zahl der Berührungskreise des dual zugeordneten Dreiecks und umgekehrt.

### 3.1. Einige Konstruktionen der Um- und Berührungskreise eines Dreiecks

Bekanntlich existieren in der H-Ebene drei Typen von Kreisen: Zykel, Hyperzykel und Horozykel. Jeden kann man als Spiegelbilder eines festen Punktes an Geraden eines festen Büschels konstruieren. Die H-Kreise in dieser Arbeit werden mittels einer bestimmten Zentralkollineation konstruiert, wobei der gegebene H-Kreis dem absoluten Kegelschnitt zugeordnet ist (Kollineationsachse = Kreisachse, Kollineationszentrum = Kreiszentrum).

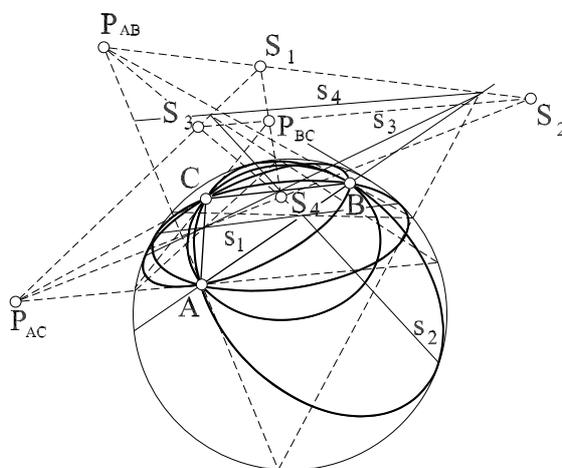
BEISPIEL 1. Durch die drei eigentlichen Punkte  $A, B, C$  wird ein eigentliches Dreieck des Typs 1 gezeichnet (Fig. 3). Die drei Paare Seitensymmetralen schneiden sich in den vier Mittelpunkten  $S_1, S_2, S_3, S_4$  der vier Umkreise. Jeder der Umkreise wird mittels einer bestimmten Zentralkollineation  $(S_i, s_i)$  konstruiert [10]. Der Kreismittelpunkt  $S_i$  ist das Kollineationszentrum und die ihm zugeordnete absolute Polare  $s_i$  ist die Kollineationsachse. In diesem Fall handelt es sich um drei Hyperzykel und einen Zykel.

<sup>1</sup>Die Konstruktion eines solchen Schwerpunktes erfolgt dabei entsprechend der euklidischen Konstruktion als Schnittpunkt der Verbindungslinien von Seitenmittelpunkten mit Gegenecken. Ob diese Punkte, die nach dem Satz niv CEVA existieren müssen, tatsächlich die Bedeutung des Masseschwerpunktes der drei mit gleicher Masse belegten Dreiecksecken hat, ist hier nicht Gegenstand der Untersuchung. Wir verwenden den Begriff “Schwerpunkt” hier im Sinne einer Analogie zum euklidischen Fall.



Es ist interessant zu bemerken, dass das absolute Poldreieck  $P_{AB}P_{AC}P_{BC}$  des gegebenen Dreiseits  $ABC$  mit dem Diagonaldreieck des Vierecks  $S_1, S_2, S_3, S_4$  übereinstimmt.

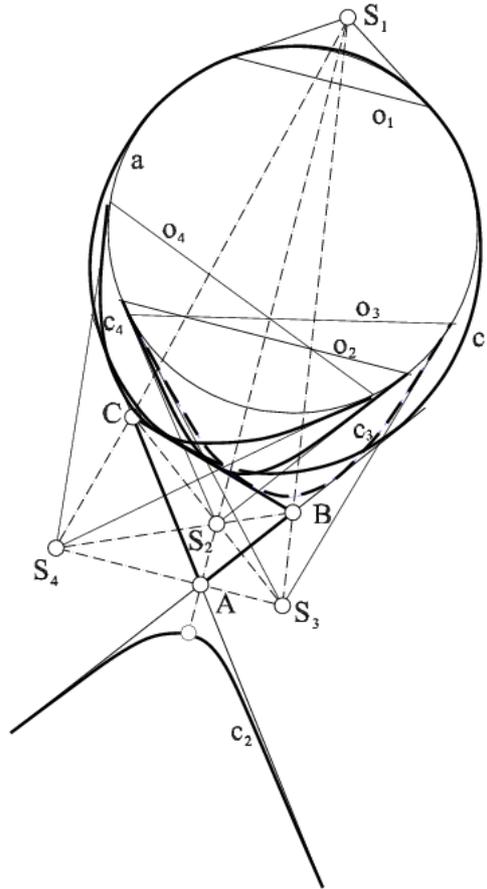
*Bemerkung.* Die analoge Konstruktion könnte man für ein Dreieck des Typs 19, mit idealen Ecken und den Seiten auf eigentlichen Geraden durchführen. Alle Umkreise eines solchen Dreiecks würden ideale Kreise sein.



Figur 3. Vier Umkreise des eigentlichen Dreiecks

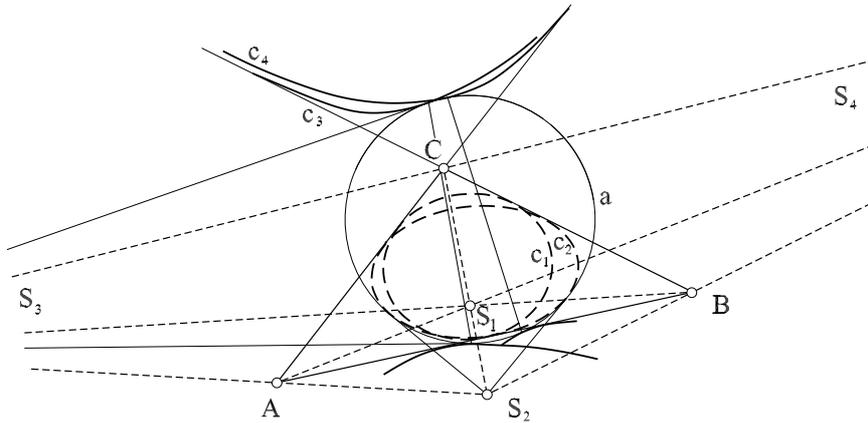
BEISPIEL 2. Durch die drei ideale Eckpunkte auf drei idealen Geraden ist ein ideales Dreieck  $ABC$  des Typs 28 (siehe Fig. 4) dargestellt. Dieser Typ steht dem Dreieck vom Beispiel 1 dual gegenüber. Den vier Umkreisen des Beispiels 1. entsprechen dabei vier Berührungskreise des dualen Dreiecks. Da sich in diesem Fall die Winkelsymmetralen in den vier Idealpunkten durchschneiden, folgt dass man hier um vier Hyperzikel erhält, wobei alle vier Ankreise sind. Liegt der absolute Kegelschnitt im Inneren des idealen Dreiecks, würde einer der vier Berührungskreise als Inkreis (ein Zykel) aufgefasst werden können.

BEISPIEL 3. Das Dreieck  $ABC$  des Typs 5 sei gemäß Fig. 5 gegeben. Die Seiten  $AC$  und  $BC$  dieses Dreiecks besitzen keinen Mittelpunkt und keine Symmetrale. Damit folgt dass dieses Dreieck keinen Schwerpunkt und auch keinen Umkreis

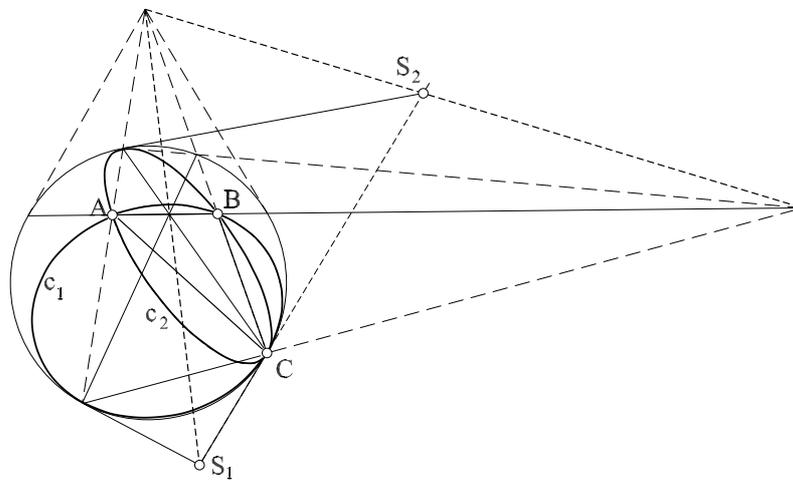


Figur 4. Ideales Dreieck mit vier idealen Ankreisen

besitzt. Nicht nur deswegen ist das ein ungewöhnliches Dreieck. Ungewöhnlich ist, dass dieses Dreieck zwei eigentliche Inkreise und zwei ideale Ankreise besitzt. Es existiert kein Analogon dieses Dreiecks in der euklidischen Ebene. Alle vier Berührungskreise sind mittels Zentralkollineation aus dem absoluten Kegelschnitt konstruiert [10]. Der Kreismittelpunkt jedes Kreises ist das Kollineationszentrum, und die Kreisachse ist die Kollineationsachse. Wie man leicht sieht, das zu diesem Dreieck duale Dreieck des Typs 22 besitzt vier ideale Umkreise.

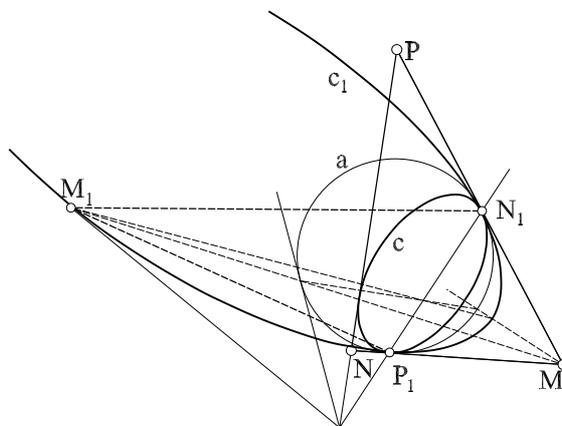


Figur 5. Dreieck mit vier Berührungskreisen (Es gibt keinen Umkreis)



Figur 6. Umkreise des asymptotischen Dreiecks

BEISPIEL 4. In Fig. 6 ist ein eigentliches asymptotisches Dreieck  $ABC$  des Typs 2 mit der Ecke  $C$  auf dem absoluten Kegelschnitt dargestellt. Obwohl die Dreieckseiten  $AC$  und  $BC$  keine Symmetralen besitzen, existieren doch zwei Umkreise des Dreiecks. Nämlich, der Mittelpunkt jedes durch den Punkt  $C$  belegten Kreises liegt auf der durch den Punkt  $C$  laufenden Grenzgeraden und die zwei Symmetralen der eigentlichen Seite  $AB$  schneiden diese Gerade in zwei Idealpunkten. Diese zwei Schnittpunkte  $S_1$  und  $S_2$  sind die Mittelpunkte der zwei Dreiecksumkreise. Im Fall der Fig. 6 handelt es sich um zwei Hiperzykeln. Läuft eine der zwei Symmetralen der Seite  $AB$  durch den Punkt  $C$ , fällt sie also mit der Höhe der Seite  $AB$  zusammen, wird ein der entsprechende Hyperzykel ein Horozykel sein. In diesem Fall liegt ein gleichschenkeliges asymptotisches Dreieck vor. Da nur eine Dreieckseite zwei Milletpunkt besitzt,  $C$  ist gleich der einzige Schwerpunkt dieses Dreiecks. Es ist leicht zu sehen dass dieses Dreieck auch zwei Beruhrkreise besitzt. Das duale Dreieck des Typs 27 besitzt auch zwei Umkreise und zwei Beruhrkreise. Wie man aus der Tabelle 2 sieht, haben solche Eigenschaften auch Dreiecktypenpaare 14 und 20. Andere, einfach asymptotische Dreiecke besitzen entweder nur zwei Umkreise oder nur zwei Beruhrkreise.

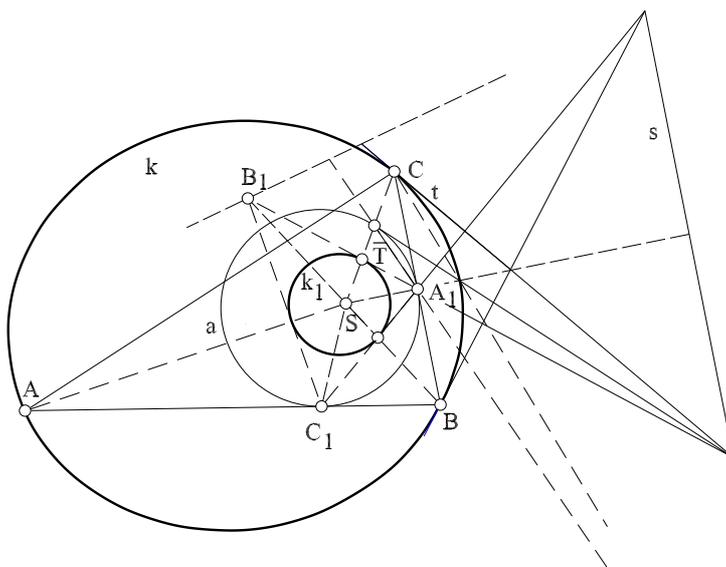


Figur 7. Doppelasymptotische Dreiecke

BEISPIEL 5. In der Fig. 7 sieht man ein doppelasymptotisches Dreieck  $MNP$  des Typs 21 mit zwei Seiten  $MN$  und  $MP$  je auf einer Grenzgeraden. Obwohl dieses Dreieck keine echte Winkelsymmetrale besitzt, besitzt es doch einen Inkreis

$c$ , der durch eine Zentralkollineation konstruiert wird. Die Ecke  $M$  nimmt man als das Kollineationszentrum, und ihre absolute Polare als die Kollineationsachse. Ordnet man jeder Ecke dieses Dreiecks ihre absolute Polare zu, so bekommt man das duale Dreieck  $M_1N_1P_1$  des Typs 11. Der Umkreis  $c_1$  dieses Dreiecks steht dual und konzentrisch zum Kreis  $c$ , weil seine absoluten Berührungspunkte  $N_1, P_1$  den absoluten Tangenten des Kreises  $c$  dual entsprechen, somit besitzen diese Kreise das gleiche Zentrum  $M$ .

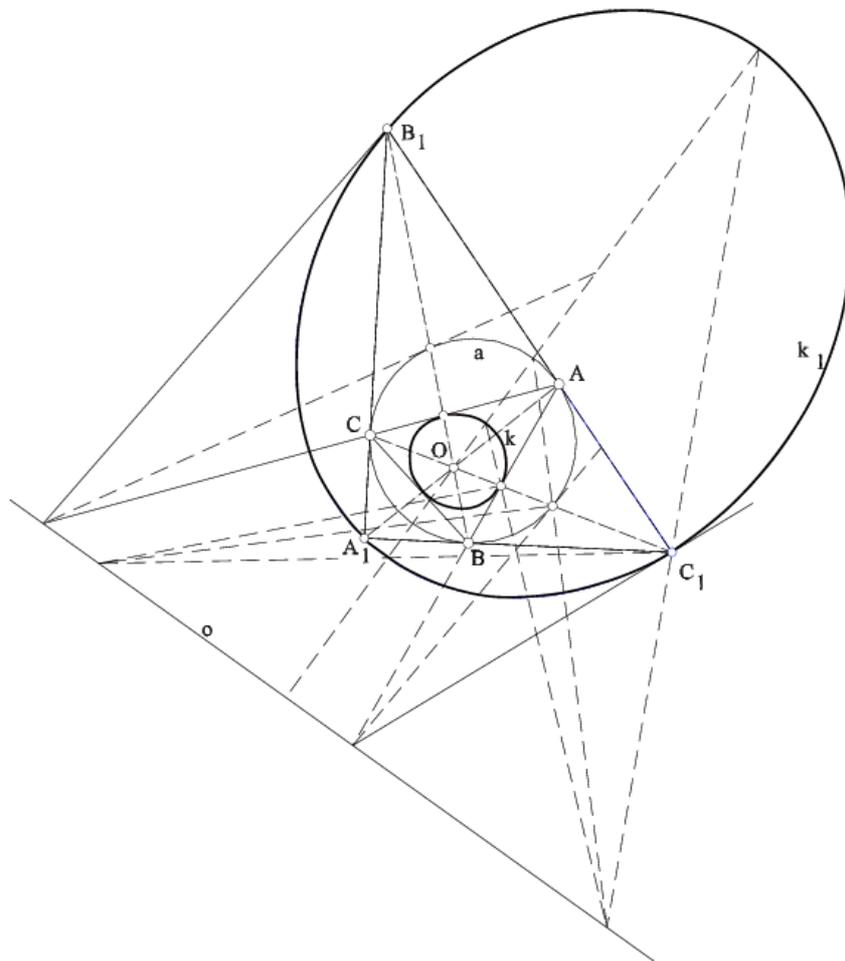
BEISPIEL 6. Ein duales Dreieckspaar  $ABC$  und  $A_1B_1C_1$  der gleichen Typen 21 und 11 wie im vorigen Beispiel, ist in der Fig. 8 gezeichnet. Die Konstruktion des Umkreises des Dreiecks  $ABC$  wurde auf folgende Weise durchgeführt. Man konstruiert zuerst das duale Dreieck  $A_1B_1C_1$  und seinen Inkreis  $k_1$ . Der gesuchte Umkreis  $k$  des Dreiecks  $ABC$  steht zu diesem Kreis  $k_1$  konzentrisch und dual.



Figur 8. Doppelasymptotische Dreiecke

*Bemerkung.* Die doppelasymptotischen Dreiecke im Bezug auf eine Seite und eine Ecke (9, 18 und 15) besitzen keinen Umkreis und keinen Berührungskreis.

BEISPIEL 7. Das dreifach asymptotische Dreieck  $ABC$  des Typs 10 besitzt den absoluten Kegelschnitt als den einzigen Umkreis. Auch existiert ein einziger Inkreis  $k$  dieses Dreiecks, dessen Mittelpunkt in der Fig. 8 als der eigentliche Schnittpunkt seiner eigentlichen Winkelsymmetralen konstruiert wird. Der Punkt  $O$  ist gleichzeitig der Umkreismittelpunkt des dualen Dreiecks  $A_1B_1C_1$  des Typs 25. Der absolute Kegelschnitt ist sein einziger Inkreis.



Figur 9. Dreimal asymptotische Dreiecke

*Bemerkung.* Es existiert noch ein weiteres duales Paar von dreifach-asymptotischen Dreiecken von denen jedes keinen Umkreis und keinen Berührungskreis besitzt (12 und 16). Speziell für ein Dreieck des Typs 13, das sich als ein vierfach-asymptotisches Dreieck auffassen lässt, existiert kein einziger charakteristischer Dreieckspunkt.

Am Abschluß soll erwähnt werden, dass in dieser Arbeit nur ein kleines Thema aus dem Wirkungskreis der konstruktiven H-Geometrie bearbeitet wird. Damit möchten wir das Interesse der jungen Geometer anregen, um die H-Planimetrie konstruktiv zu untersuchen. Mittels modernen graphischen Technologien (analytischen und computer-algebraischen Methoden und CAD-Programmen, die in der H-Ebene unmittelbar “mit Zirkel und Lineal” konstruieren lassen) können sie sich auf die Untersuchung der hyperbolischen Welt einlassen. Unsere Figuren wurden auch mit Computer gezeichnet. Wir planen in dieser Richtung noch weitere Arbeiten zusammen mit E. Molnár im Sinne seiner Arbeit [8] zuuntersuchen.

### Literatur

- [1] I. Babić, B. Kućinić, M-Modell des hyperbolischen H<sup>3</sup>-Raums in der Möbius-Ebene, *Rad HAZU* **467** (1994), 67–75.
- [2] I. Babić, Neke kolineacije H-ravnine, *KoG* **9** (2005), 39–43.
- [3] F. Bachmann, *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, 2. Auflage, Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1973.
- [4] V. F. Kagan, *Osnovaniya geometrii*, č. 1. Geometrija Lobačevskogo i jejo predistorija, Moskva–Lenjingrad, 1949.
- [5] F. Klein, *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*, Springer-Verlag, Berlin, 1928, Nachdruck 1968.
- [6] V. I. Kostin, *Osnovaniya geometrii*, Moskva-Lenjingrad, 1946.
- [7] H. Liebmann, *Nichteuklidische Geometrie*, Walter de Gruyter & co., Berlin-Leipzig, 1923.
- [8] E. Molnár, Inversion auf der Idealebene der Bachmannschen metrischen Ebene, *Acta Mathematica Scientiarum Hungaricae* **37**, no. 4 (1981), 451–470.
- [9] L. Rajčić, Obrada osnovnih planimetrijskih konstrukcija geometrije Lobačevskog sintetičkim sredstvima, *Glasnik mat. Fiz. Astr.* **5** (1950), 57–120.
- [10] A. Sliepčević, J. Kos-Modor, Neke planimetrijske konstrukcije u H-ravnini, *KoG* **9** (2005), 35–37.

ANA SLIEPČEVIĆ  
FAKULTÄT FÜR BAUWESEN  
KAČIĆEVA 26  
10000 ZAGREB  
CROATIA

*E-mail:* [anas@grad.hr](mailto:anas@grad.hr)

IVANKA BABIĆ  
TECHNISCHE HOCHSCHULE  
AVENIJA VEČESLAVA HOLJEVCA 15  
10000 ZAGREB  
CROATIA

*E-mail:* [ibabic@tvz.hr](mailto:ibabic@tvz.hr)

*(Received June, 2006)*