5/1 (2007), 217–229
tmcs@inf.unideb.hu
http://tmcs.math.klte.hu
Teaching Mathematics and Computer Science

Veranschaulichung der Lehrstoffstruktur durch Galois-Graphen

László Fatalin

Abstract. In this article we compare the process diagram with the Galois-graph, the two hierarchical descriptions of the curriculum's construction from the point of didactics. We present the concrete example through the structure of convex quadrangles. As a result of the analysis it is proved that the process diagram is suitable for describing the activity of pupils, still the Galois-graph is the adequate model of the net of knowledge. The analysis also points out that in teaching of convex quadrangles the constructions of curriculum based only on property of symmetry and only on metrical property are coherent. Generalizing concept is prosperous if the pupils' existing net of knowledge lives on, at most it is amplified and completed. Teaching of convex quadrangles in Hungarian education adopts this principle.

Key words and phrases: konvexe Vierecke, Begriffsanalyse, Entscheidungsbaum.

ZDM Subject Classification: C30, E40, G20.

Ein und derselbe mathematische Inhalt kann nach unterschiedlichen Aufbauprinzipien strukturiert werden. Die Struktur des einzelnen hierarchischen (sachlogischen) Aufbaus kann durch mehrere mathematische Hilfsmittel (Graphen und Relationen) veranschaulicht werden. In diesem Artikel wird – beispielsweise – der Lehrstoff „konvexe Vierecke" mit Hilfe des Prozessdiagramms und des Galois-Graphen untersucht. Das Vergleichen dieser hierarchischen Beschreibungsformen kann zu neuen mathematikdidaktischen Einsichten verhelfen, die in der Forschung, bei der Entwicklung von Lehrplänen und der Planung des Unterrichts eine wichtige Rolle spielen.

Kontexttabelle der konvexen Vierecke

Um die Struktur des Lehrstoffes „konvexe Vierecke“ mit mathematischen Mitteln beschreiben zu können, sind die Menge von Objekten und die Menge von Eigenschaften zu fixieren. Die Ausführlichkeit der Betrachtung bestimmt die Größe der Objektmenge und der Eigenschaftsmenge. Diese Studie geht von den Erfordernissen des ungarischen Lehrplans *[NAT, 1995]* aus. Tabelle 1 und Tabelle 2 enthalten die untersuchten speziellen Vierecke als Objekte bzw. die Eigenschaften mit den entsprechenden Zeichen.

Tabelle 1. Die Menge der untersuchten konvexen Vierecke.

Die Menge der untersuchten konvexen Vierecken: *O*	
Gebilde als Objekt	**Kodiert durch**
konvexes Viereck	**1**
Trapezoid	**2**
Trapez	**3**
symmetrisches Trapez	**4**
Drache	**5**
Parallelogramm	**6**
Raute	**7**
Rechteck	**8**
Quadrat	**9**
Sehnenviereck	**10**
Berührungsviereck	**11**

In dieser Eigenschaftsmenge kommen sowohl die metrischen als auch die symmetrischen Eigenschaften vor.

Die Beziehung zwischen den Eigenschaften und den Objekten kann durch eine so genannte Kontexttabelle veranschaulicht werden. Die Kontexttabelle R (Tabelle 3) enthält in den Zeilen die Objekte, in den Spalten die Eigenschaften und in der Kreuzung einer Zeile und Spalte die Information, ob das Viereck die genannte Eigenschaft besitzt. Die Darstellung der Kontexttabelle (die Beschreibung der Mengen und das Ausfüllen der Tabelle) verlangt gleichzeitig die mathematische und auch die mathematikdidaktische Kompetenz.

Tabelle 2. Die Menge der Eigenschaften *E*.

Die Menge der Eigenschaften: *E*	
Eigenschaften des Vierecks	**Kodiert durch**
(mind.) ein paralleles Seitenpaar	**A**
(mind.) ein gleichlanges Seitenpaar	**B**
zwei parallele Seitenpaare	**C**
zwei gleichlange Seitenpaare	**D**
gleichlange Seiten	**E**
gleichlange Diagonalen	**F**
zueinander senkrechte Diagonalen	**G**
einander halbierende Diagonalen	**H**
(mind.) ein gleichgroßes Winkelpaar	**I**
zwei gleichgroße Winkelpaare	**J**
gleichgroße Winkel	**K**
Zentralsymmetrie	**L**
(mind.) eine Achsensymmetrie bezüglich der Diagonale	**M**
(mind.) eine Achsensymmetrie bezüglich der seitenhalbierenden Senkrechten	**N**
zwei Achsensymmetrien bezüglich der Diagonalen	**O**
zwei Achsensymmetrien bezüglich der seitenhalbierenden Senkrechten	**P**
eine Achsensymmetrie bezüglich der Diagonale und bezüglich der seitenhalbierenden Senkrechte	**Q**
Umkreis	**R**
Inkreis	**S**

Tabelle 3. Kontexttabelle R der konvexen Vierecken nach dem ungarischen Lehrplan.

Kontexttabelle *R*			**Eigenschaften *E***																		
			A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**
Vierecke *O*	konvexes Viereck	1																			
	Trapezoid	2																			
	Trapez	3	*																		
	symm. Trapez	4	*	*				*			*	*				*				*	
	Drache	5		*		*			*		*				*						*
	Parallelogramm	6	*	*	*	*				*	*	*		*							
	Raute	7	*	*	*	*	*		*	*	*	*		*	*		*				*
	Rechteck	8	*	*	*	*		*		*	*	*	*	*		*		*		*	
	Quadrat	9	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	Sehnenviereck	10																		*	
	Berührungsviereck	11																			*

Entscheidungsbaum der konvexen Vierecken

Bei gegebenen Objekt- und Eigenschaftsmengen (in dieser Betrachtung) kann man die Objekte durch einen Entscheidungsbaum sortieren, wobei die Entscheidungstätigkeit (einordnen bzw. ausschließen) die Hauptrolle spielt. Ein Entscheidungsbaum beschreibt eine Methode, durch die verschiedene Fälle kategorisiert werden können. Nach dieser klassischen didaktischen Auffassung entsteht die hierarchische Ordnung der Begriffe durch formallogische Überlegungen, die auf den wesentlichen Eigenschaften beruhen. Die relevanten Eigenschaften können auf verschiedene Weise ausgewählt werden, so können auch mehrere Entscheidungsbäume aus einer Kontexttabelle abgeleitet werden.

Pelle (1974) gibt einen Algorithmus an, mit dem man entscheiden kann, in welche Kategorie das konkrete Viereck fällt. Die Abbildung 1 enthält ein fertiges Prozessdiagramm nach Pelle.

Die Tabelle 4 zeigt die ausgewählten Eigenschaften und die verbrauchten Informationen. In der Tabelle 4 zeigt das Zeichen '$\boldsymbol{x}$' diejenigen Informationen aus der Kontexttabelle, die in dem Entscheidungsbaum nicht benutzt werden. Im Allgemeinen werden nicht alle Informationen aus der Kontexttabelle zu der Herstellung eines Algorithmus benötigt.

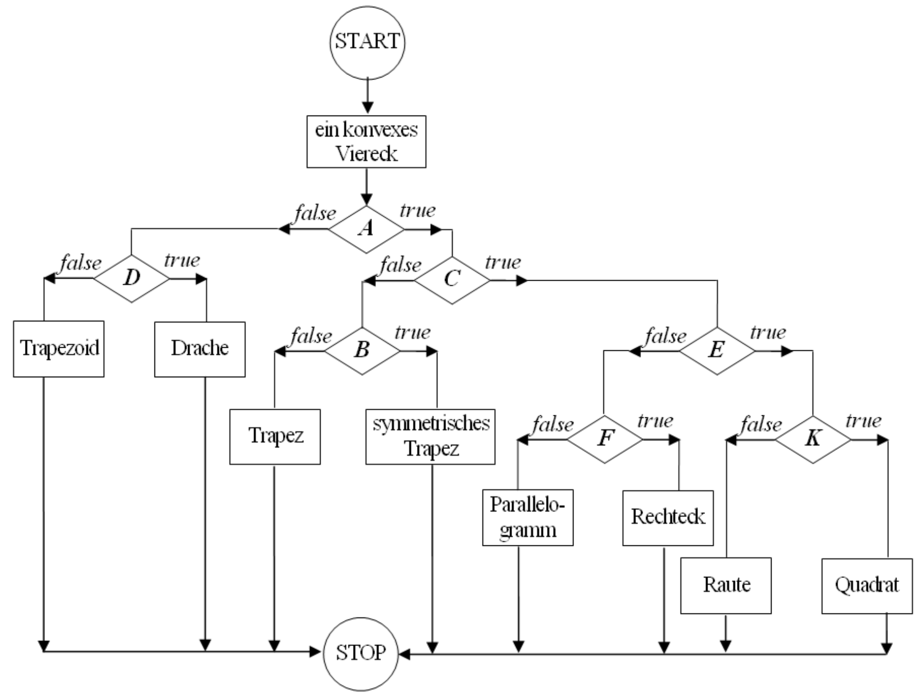

Abbildung 1. Entscheidungsbaum zu Kategorisierung der konvexen Vierecken nach Pelle.

Tabelle 4. Kontexttabelle nach Abbildung 1.

Die Kontexttabelle nach Abbildung 1			**Eigenschaften**						
			A	B	C	D	E	F	K
Vierecke	konvexes Viereck	1							
	Trapezoid	2							
	Trapez	3	$*$						
	symmetrisches Trapez	4	$*$	$*$				$\boldsymbol{x}$	
	Drache	5		$\boldsymbol{x}$		$*$			
	Parallelogramm	6	$*$	$\boldsymbol{x}$	$*$	$\boldsymbol{x}$			
	Raute	7	$*$	$\boldsymbol{x}$	$*$	$\boldsymbol{x}$	$*$		
	Rechteck	8	$*$	$\boldsymbol{x}$	$*$	$\boldsymbol{x}$		$*$	$\boldsymbol{x}$
	Quadrat	9	$*$	$\boldsymbol{x}$	$*$	$\boldsymbol{x}$	$*$	$\boldsymbol{x}$	$*$

Bezüglich des Entscheidungsbaums ist es zu bemerken, dass ein Algorithmus in impliziter Weise mehrere Informationen enthalten kann. In manschen Fällen ist es möglich am Algorithmus diejenigen Eigenschaften abzulesen, die ein konkretes Gebilde nicht besitzt ('***F***' in der Tabelle 5).

Tabelle 5. Informationstabelle nach dem Entscheidungsbaum.

Die Informationstabelle nach Entscheidungsbaum			**Eigenschaften**						
			A	B	C	D	E	F	K
Vierecke	konvexes Viereck	1							
	Trapezoid	2	***F***			***F***			
	Trapez	3	T	***F***	***F***				
	symmetrisches Trapez	4	T	T	***F***				
	Drache	5	***F***			T			
	Parallelogramm	6	T		T		***F***	***F***	
	Raute	7	T		T		T		***F***
	Rechteck	8	T		T		***F***	T	
	Quadrat	9	T		T		T		T

Aus diesen impliziten Informationen können Fehlschlüsse gezogen werden. Z.B.: Ein Drache hat ‚*nie*’ ein paralleles Seitenpaar (siehe Zelle A5 in der Tabelle 5), aber eine Raute hat ‚*immer*’ mindestens ein paralleles Seitenpaar (siehe Zelle A7 in der Tabelle 5), so kommt die folgende fehlerhafte Konklusion vor: eine Raute ist kein Drache. Diese Probleme zeigen, dass das Begriffsnetz mit dem Entscheidungsbaum einfach nicht beschrieben werden kann.

Ein hierarchisches Modell des Begriffsnetzes

Im Folgenden wird die strukturelle Beschreibung von konvexen Vierecken mit einem Mittel der formalen Analyse, mit dem Galois-Graphen, untersucht. Die formale Begriffsanalyse wurde von der Darmstädter Gruppe um *Rudolf Wille* (1996) nach Ideen von *Garrett Birkhoff* (1940) entwickelt. Die pädagogischen Anwendungen der formalen Begriffsanalyse wurden von *Viola Takács* (2000) untersucht. In den pädagogischen Anwendungen bekommen die Cliquen und die Galois-Graphen der so genannten Untersuchungsrelation die Hauptrolle.

Die Cliquen sind die maximalen geschlossenen Teilmengen der Relation. Eine Teilmenge C der Relation R ist geschlossen, wenn eine Teilmenge O' der Objektmenge O und eine Teilmenge E' der Eigenschaftsmenge E existieren, so dass die Teilmenge C als $C = O' \times E' \subseteq R$ beschrieben werden kann. (Jedes in einer Clique enthaltene Objekt besitzt alle für die Clique charakteristischen Eigenschaften). Eine geschlossene Teilmenge ist maximal, wenn sie sich weder durch Objekte noch durch Eigenschaften erweitern lässt. Eine Clique $C = O' \times E'$ kann als ein Modell für einen potentialen Begriff B betrachtet werden, wobei O' den Begriffsumfang (die Begriffsbedeutung) und E' den Begriffsinhalt (den Begriffssinn) von B modelliert.

Über der Menge der Cliquen ist eine Ordnungsrelation in folgender Weise zu definieren: die Clique $C_1 = O_1 \times E_1$ ist mehr als eine Clique $C_2 = O_2 \times E_2$, wenn $O_1 \supseteq O_2$ und $E_1 \subseteq E_2$ im mengentheoretischen Sinne gelten. Der Galois-Graph der Kontexttabelle ist das Hasse-Diagramm der geordneten Menge von Cliquen. Der Galois-Graph des Relationsmodells der Kontexttabelle gibt eine strukturelle Beschreibung von Begriffssystemen für mathematikdidaktische Konklusionen (*Fatalin* 2003a).

Cliquen der konvexen Vierecke

Aus der formalen Analyse dieser Kontexttabelle ergeben sich dreizehn Cliquen (Tabelle 6). Eine Clique kann als potentialer Begriff in dieser Betrachtung interpretiert werden. Aus einem potentialen Begriff wird ein Begriff, wenn er in der Praxis oft vorkommt, und so bekommt er einen Namen. Die Clique der konvexen Vierecke ($\{\mathbf{1}; \mathbf{2}; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\} \times \emptyset$) bekommt keinen Namen in dieser Betrachtung, weil sie ein leerer Begriff ohne Begriffsinhalt ist. (Zu der Definition des Begriffs müssen die identifizierenden und auch die unterscheidenden Eigenschaften angeben werden.) Die Cliquen 3, 4 und 5 kommen nur manchmal vor, insofern sie keinen Namen bekommen haben. Die weiteren Cliquen behalten den gewöhnlichen Namen.

Tabelle 6. Die Cliquen der Kontexttabelle.

CLIQUEN	
Objektmenge der Clique × **Eigenschaftsmenge der Clique**	**Benennung der Clique**
$\{\mathbf{1}; \mathbf{2}; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\} \times \emptyset$	ein leerer Begriff
$\{\mathbf{3}; 4; 6; 7; 8; 9\} \times \{\mathbf{A}\}$	***Trapez***
$\{4; 5; 6; 7; 8; 9\} \times \{\mathbf{B}; \mathbf{I}\}$	*diese Cliquen haben* ***keine Namen***
$\{4; 6; 7; 8; 9\} \times \{A; B; I; \mathbf{J}\}$	
$\{5; 6; 7; 8; 9\} \times \{B; \mathbf{D}; I\}$	
$\{4; 8; 9; \mathbf{10}\} \times \{\mathbf{R}\}$	***Sehnenviereck***
$\{5; 7; 9; \mathbf{11}\} \times \{\mathbf{S}\}$	***Berührungsviereck***
$\{\mathbf{6}; 7; 8; 9\} \times \{A; B; \mathbf{C}; D; \mathbf{H}; I; J; \mathbf{L}\}$	***Parallelogramm***
$\{\mathbf{4}; 8; 9\} \times \{A; B; \mathbf{F}; I; J; \mathbf{N}; R\}$	***symmetrisches Trapez***
$\{\mathbf{5}; 7; 9\} \times \{B; D; \mathbf{G}; I; \mathbf{M}; S\}$	***Drache***
$\{\mathbf{7}; 9\} \times \left\{\begin{matrix} A;\ B;\ C;\ D;\ \mathbf{E};\ G; \\ H;\ I;\ J;\ L;\ M;\ \mathbf{O};\ S \end{matrix}\right\}$	***Raute***
$\{\mathbf{8}; 9\} \times \left\{\begin{matrix} A;\ B;\ C;\ D;\ F;\ H; \\ I;\ J;\ \mathbf{K};\ L;\ N;\ \mathbf{P};\ R \end{matrix}\right\}$	***Rechteck***
$\{\mathbf{9}\} \times \left\{\begin{matrix} A;\ B;\ C;\ D;\ E;\ F;\ G;\ H;\ I;\ J; \\ K;\ L;\ M;\ N;\ O;\ P;\ \mathbf{Q};\ R;\ S \end{matrix}\right\}$	***Quadrat***

Galois-Graph der konvexen Vierecke

Nach der einführbaren Ordnungsrelation der Cliquen kann der Galois-Graph der konvexen Vierecke gezeichnet werden (Abbildung 2). Aus dieser dualen Begriffsbeschreibung folgt, dass die Verallgemeinerung des Begriffsumfangs gleichzeitig die Spezialisierung des Begriffsinhalts bedeutet. Auch umgekehrt ist dies lesbar: die Generalisation der Begriffsinhalte ergibt gleichzeitig die Spezialisierung der Begriffsumfänge. Im Folgenden modelliert dieses Diagramm das angezielte Wissensnetz im Bereich Vierecke für Abiturienten.

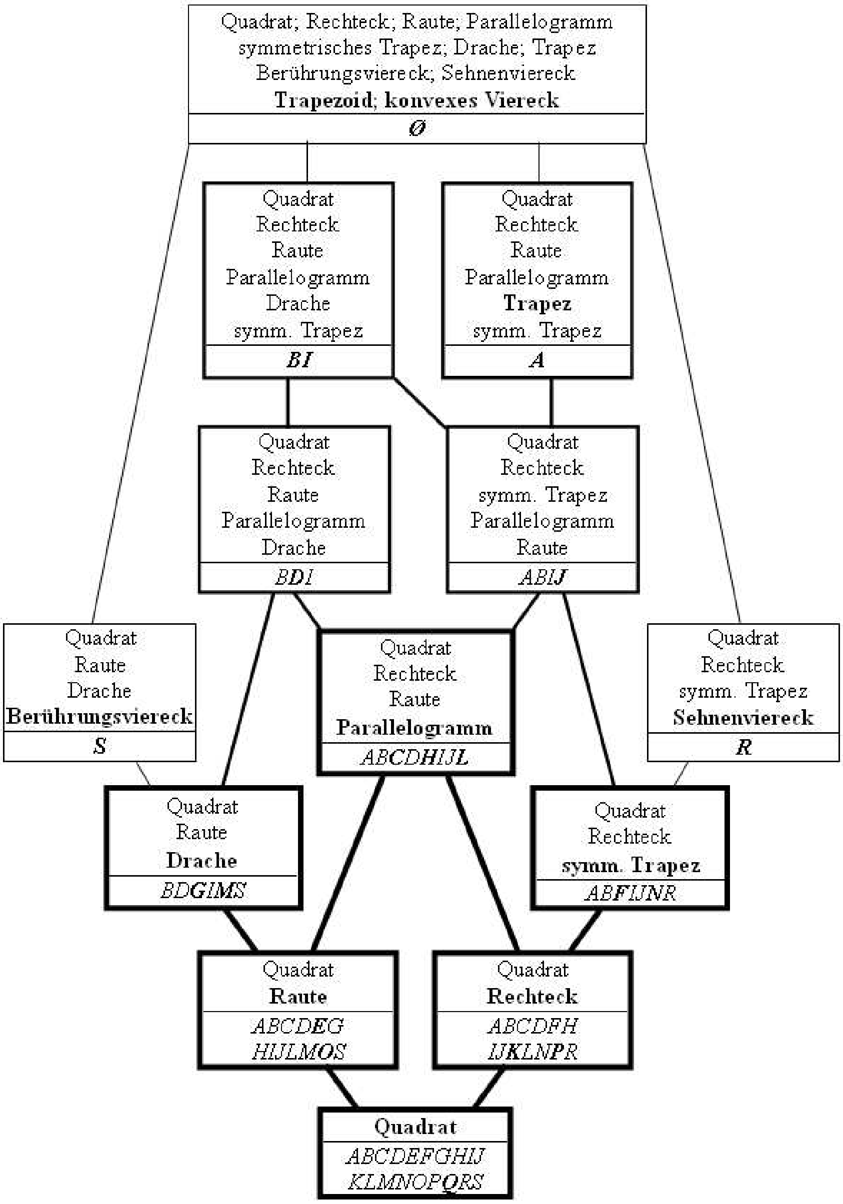

Abbildung 2. Der Galois-Graph der Kontexttabelle $R_{O \times E}$.

Die konvexen Vierecken mit der Symmetrieeigenschaften

In der Grundschule beginnt man das Systematisieren von konvexen Vierecken nach deren Symmetrieeigenschaften. In diesem Fall sind O_1 und E_1 die entsprechenden Teilmengen von O bzw. E. Ferner ist S eine Teilkontexttabelle von R, also ist S eine Einschränkung von R, d.h. $S = R|_{O_1 \times E_1}$. Im Unterricht gehen wir umgekehrt vor, die Relation R erhalten wir als eine Erweiterung von S.

Tabelle 7. Kontexttabelle nach den symmetrischen Eigenschaften der Vierecke in der ungarischen Grundschule.

Die Kontexttabelle von S			**Eigenschaften E_1**					
			L	M	N	O	P	Q
Vierecke O_1	Symmetrisches Trapez	4			*			
	Drache	5		*				
	Parallelogramm	6	*					
	Raute	7	*	*		*		
	Rechteck	8	*		*		*	
	Quadrat	9	*	*	*	*	*	*

Durch die Analyse der Kontexttabelle S erhalten wir den Aufbau des Bereiches „Vierecke“, das angezielte Wissensnetz (Abbildung 3).

Die konvexen Vierecke mit metrischen Eigenschaften

In der Unterstufe ist es möglich die konvexen Vierecke nach metrischen Eigenschaften zu systematisieren. In diesem Fall sind O_2 und E_2 die entsprechenden Teilmengen von O bzw. E. Ferner ist M auch eine Teilkontexttabelle von R, d.h. $M = R|_{O_2 \times E_2}$, siehe Tabelle 8.

Es ist in Abbildung 4 ersichtlich, dass die Grundbeschaffenheit des Galois-Graphen nach den Symmetrieeigenschaften unverändert bleibt. In diesem Sinn zeigt der Vergleich des Galois-Graphen nach der Symmetrie mit dem Graphen nach metrischen Eigenschaften, dass das angezielte Wissensnetz in der Unterstufe eine Erweiterung des Netzes für die Grundschule ist. Das Wissensnetz wird mit

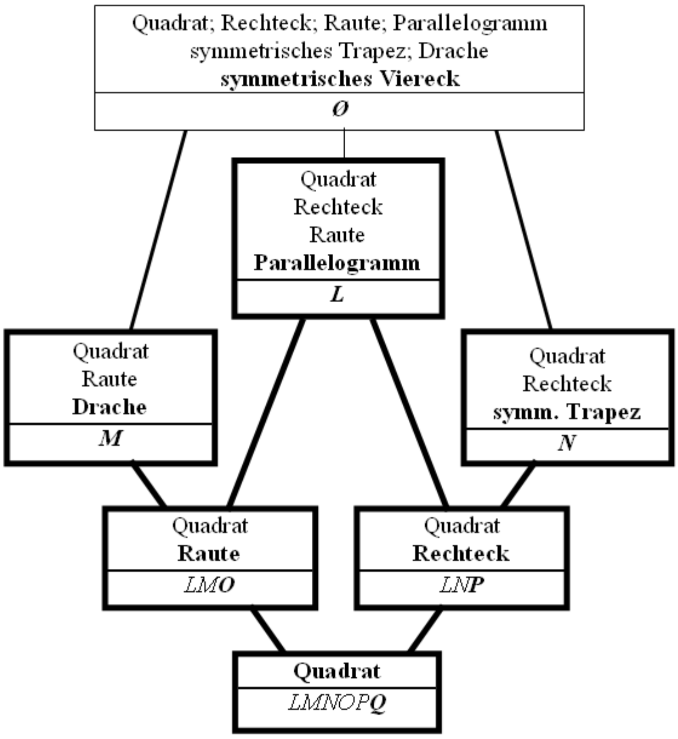

Abbildung 3. Das abgezielte Wissensnetz im Bereich Vierecke am Ende der Grundschule.

Tabelle 8. Kontexttabelle nach metrischen Eigenschaften der Vierecke in der ungarischen Unterstufe (10–14-jährige Schüler).

Die Kontexttabelle von M			**Eigenschaften E_2**										
			A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Vierecke O_2	Trapez	3	∗										
	Symmetrisches Trapez	4	∗	∗				∗			∗	∗	
	Drache	5		∗		∗			∗		∗		
	Parallelogramm	6	∗	∗	∗	∗				∗	∗	∗	
	Raute	7	∗	∗	∗	∗	∗		∗	∗	∗	∗	
	Rechteck	8	∗	∗	∗	∗		∗		∗	∗	∗	∗
	Quadrat	9	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∗	∗

den Begriffen des Sehnenvierecks und des Berührungsvierecks in der Mittelschule ergänzt.

Aus didaktischem Aspekt ist es wichtig, dass die angeeignete Grundbeschaffenheit des Wissensnetzes nach Verallgemeinerung unverändert bleibt, d.h. die Schüler müssen die erlernten Kenntnisse nicht modifizieren, umschreiben. Dieses didaktische Prinzip sichert, dass die Generalisation nur Ergänzungen oder Erweiterungen des Wissensnetzes mit sich bringt, was man durch Galois-Graphen untersuchen kann. In diesem Sinne ist es vorteilhaft den Galois-Graphen als Begriffsnetz-Modell anzuwenden.

Im Unterrichtsprozess kann die Schülertätigkeit mit entsprechenden Aufgabenserien gelenkt werden. Die strukturelle Bewertung der Aufgabenserien und deren Schülerlösungen können auch mit diesem Relationsmittel gemacht werden (*Fatalin* 2003b). Aus diesem Gesichtswinkel ist dieses Begriffsnetz-Modell auch vorteilhaft.

Literatur

[1] L. Fatalin, Strukturelle Analyse des Lernstoffes, in: *Neue Sichtweisen in der Didaktik der Mathematik*, K. J. Parisot & É. Vásárhelyi (Hrsg.), Abakus Verlag, Salzburg, 2003a.

[2] L. Fatalin, Strukturelle Analyse von Aufgabenserien und deren Schülerlösungen, in: *Neue Sichtweisen in der Didaktik der Mathematik*, K. J. Parisot & É. Vásárhelyi (Hrsg.), Abakus Verlag, Salzburg, 2003b.

[3] B. Ganter & R. Wille, *Formale Begriffsanalyse*, Springer, Berlin, 1996.

[4] B. Pelle, *Geometria*, (*Geometrie*, ungarisch), Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.

[5] V. Takács, A Galois-gráf pedagógiai alkalmazásai, (Die pädagogische Anwendungen der Galois-Graphen, ungarisch), *Iskolakultúra*, Pécs, 2000.

[6] Z. Varsics, Osztályozási modellek – hierarchikus rendszerek, (Modelle der Klassifikation – hierarchische Systeme, ungarisch), *Iskolakultúra*, 1993/5, Budapest, 1993.

LÁSZLÓ FATALIN
TECHNICAL SCHOOL OF KELENFÖLD
FEHÉRVÁRI SGT. 159
H–1119 BUDAPEST
HUNGARY

(Received September, 2005)

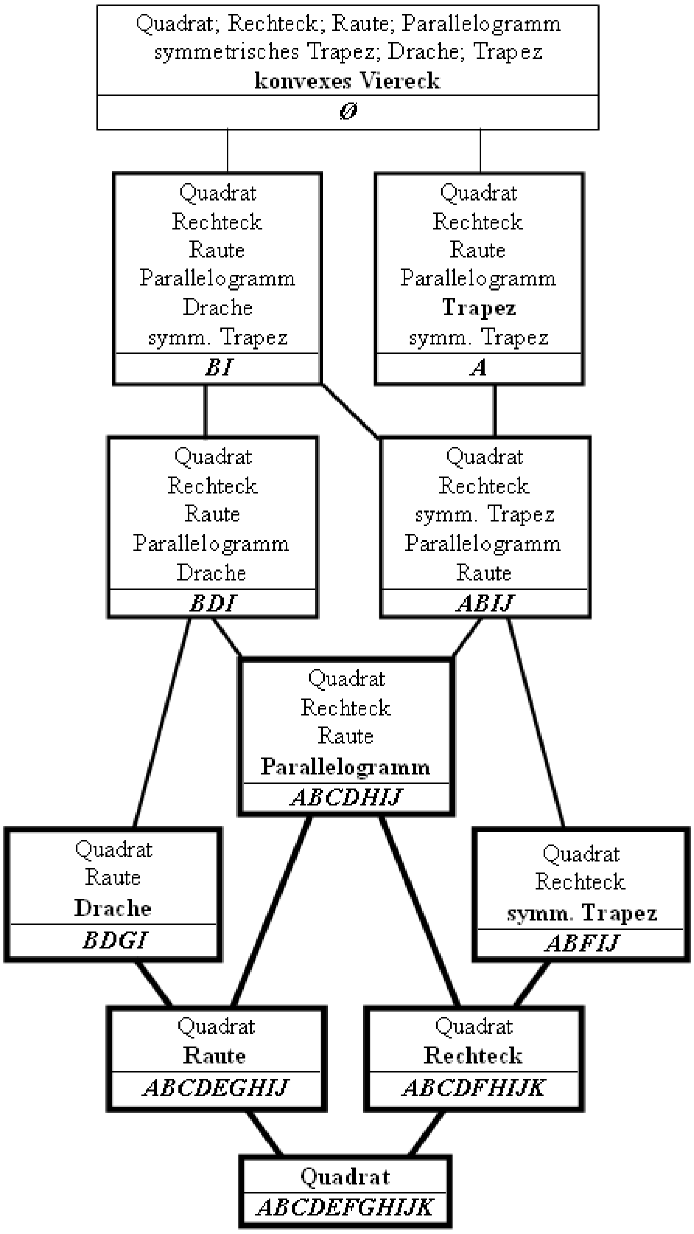

Abbildung 4. Das angezielte Wissensnetz im Bereich Vierecke am Ende der Unterstufe.