4/2 (2006), 365–389
tmcs@inf.unideb.hu
http://tmcs.math.klte.hu

Teaching
Mathematics and
Computer Science

Bemerkungen zur Prototypentheorie – Begriffs- und Konzeptbildung

Éva Vásárhelyi

Abstract. Psychological theories of prototypes are put forward by mathematical modelling. Some didactical consequences are discussed on the background of this analysis. By the help of an example (classification of convex quadrangles) hints are given for didactical interpretations of actual models of cognitive psychology dealing with problems of constructing prototypes.

Key words and phrases: psychology of mathematics education, research in mathematics education, cognitive processes, research methods in psychology: mathematical modelling.

ZDM Subject Classification: C30, C80, M70.

Die vorliegende Arbeit ist ein Versuch den Prototyp – als einen von den Grundbegriffen der fundamentalen psychologischen Konstrukte einer adaptiven Lerntheorie – aus psychologischer und pädagogischer Sicht zu untersuchen. Dieser Artikel ist im Rahmen eines Projekts „Innere Differenzierung und Individualisierung einschließlich Analogiebildung als integratives Modell des adaptiven Lernens (mit besonderer Berücksichtigung des Computereinsatzes)" unter der Leitung von H.-J. Herber entstanden.

Wir bezeichnen durch das Wort *Prototyp* das Komplexum der *charakteristischen Merkmale einer Kategorie* (der allgemeingültigen, erfahrungs- und kulturabhängigen Kriterien - Identifizierungsschemata) *und des typischen Repräsentanten* (Urmusters) der Kategorie.

Der „Prototyp" als kognitives Konzept ist eine vorsprachliche Größe und muss nicht notwendigerweise versprachlicht sein (vgl. [15]). Ein Prototyp stellt vielmehr ein idealisiertes kognitives Modell dar. Um dieses Kriterienbündel (bestehend aus intensionalen Merkmalen) oder den idealen Vertreter einer Kategorie herum ordnen sich die Mitglieder der Kategorie an. Entscheidend für eine Kategorie ist also der Übereinstimmungsgrad der Mitglieder einer Kategorie, den die repräsentativen Vertreter „mehr oder weniger" aufweisen. Die Granuliertheit des Modells zieht unterschiedliche Auswertungsprozesse nach sich (im Sinne einer Nominalskala, mit der nur die Zugehörigkeit/Abgrenzung zu einer Kategorie festgestellt wird, oder als quantitative Bestimmung des Übereinstimmungsgrades).

1. Konstruktion eines Prototyps durch Transformationen, Entstehen eines „Musters"

Franks & Bransford haben folgendes Experiment durchgeführt (vgl. [4]):

Eine Karte mit vier Figuren (z.B. Quadrat links oben, Dreieck links unten, Herz rechts oben, Karo rechts unten) wurde als „prototypisches Muster" festgelegt. Dann wurde eine Transformationsregel definiert (z.B. um 90° gedrehte Anordnung).

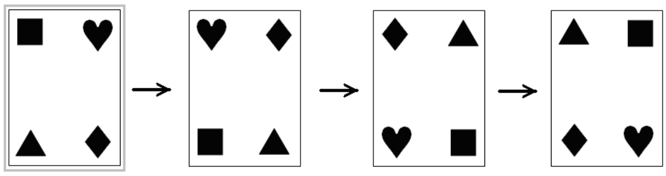

Abbildung 1. Das Muster und die transformierten Elemente

Mit diesen Regeln wurden „Zielkarten" festgelegt, die Modifikationen des Ausgangsmusters enthielten, die durch einen, zwei oder mehrere Transformationsschritte gemäß dieser Regeln zu Stande kamen. Die Versuchspersonen sahen (kurz, tachistoskopisch) die Zielkarten, das Ausgangsmuster bekamen sie nicht zu Gesicht. Bei einem Wiedererkennungstest wurde eine Folge von anderen (gleichrangigen) Karten einschließlich des Ausgangsmusters vorgelegt. Überraschend gaben die Versuchspersonen am häufigsten an, die prototypische Karte schon im Vorversuch gesehen zu haben (und waren sich dieser Entscheidung am sichersten gegenüber anderen, transformierten Karten). Je mehr eine Karte dem Ausgangsmuster ähnelte (je weniger Transformationsschritte zwischen ihr und der prototypischen Karte lagen), desto höher war der angegebene Wiedererkennungsgrad (und die subjektive Entscheidungssicherheit). Offensichtlich (re-)konstruierten die Versuchspersonen aus den faktisch wahrgenommenen Mustern durch Prototypenbildung ein „Urmuster", von dem sie – gemäß den Transformationsregeln – die anderen Muster ableiteten. Das Urmuster hatte also bei der Wiedererkennung eine größere Bedeutung als ein anderes (wenn auch gleichrangiges) Element[1] seiner Kategorie, es komprimierte die Erfahrungen bezüglich der ganzen Klasse.

Neben der Konstruktion eines Prototyps durch systematische Transformationen können Prototypen auch durch Zufallsprozesse abgewandelt (verzerrt) werden (vgl. [16], 87ff.). Auch dann ist es möglich, die von einem bestimmten Urmuster ausgehenden Verzerrungen von den Abwandlungen zu unterscheiden, die von einem anderen Urmuster abgeleitet wurden. Man kann sich die von einem Urmuster abgeleiteten Gestaltvarianten so vorstellen, dass sie sich innerhalb – verschieden weit vom Mittelpunkt entfernt – eines Kreises befinden (wobei das Urmuster das Zentrum bildet). Wichtig ist die Einbettung in eine Serie von Abwandlungen: Ein Urmuster wird offensichtlich am besten abgespeichert, wenn es in verschiedenen Einbettungen dargeboten wird, die aus Abwandlungen/Analogiebildungen zum Urmuster entstanden sind – und nicht durch die isolierte Darstellung eines Urmusters „für sich" (vgl. die durch Analogiebildungen gegebenen didaktischen Möglichkeiten, in ein Stoffgebiet dort „einzusteigen", wo der Lernende kognitiv und motivational am besten „andocken" kann, etwa im Sinne der Problembegegnung „Prototyp" im Modell der Inneren Differenzierung von Herber & Vásárhelyi [8]; vgl. auch Abbildung 2). Das Urmuster wird dadurch im Gedächtnis besser eingespeichert und der Erinnerung leichter zugänglich, weil so zusätzliche Informationen über die einzelnen Varianten mit vernetzt werden.

Wie sich in der einschlägigen Forschung zeigen lässt, bestehen Begriffe (Schemata, semantische Netzwerke) und die sie repräsentierenden Exemplare nicht unabhängig von einander. Urmuster scheinen ein optimales („mittleres") Niveau der Begriffsbildung zu repräsentieren, auf dem sich Menschen kognitiv und motivational am liebsten bewegen. Wenn man über Hunde (etwa im Unterschied zu Katzen) redet, könnte man sie sich als eine Einsetzungsinstanz für Säugetiere oder – hierarchisch noch höher – für Lebewesen vorstellen. Doch kaum jemand wird das tun, das ist anscheinend „zu hoch" gegriffen. Auch wird man dabei nicht so sehr über die spezifischen Eigenschaften bestimmter Hunderassen differenziert nachdenken – außer man überlegt, sich einen Hund anzuschaffen (als Schoßhund, Wachhund,

[1]Einfachheitshalber schreiben wir in der Sprache der Mengentheorie Element oder Objekt. Das Ergebnis einer Klassifikation kann aber zu einer komplexeren Struktur führen, wo statt der Elemente Unter- bzw. Oberbegriffe sowie (Teil-)Strukturen vorkommen können.

Blindenhund, etc.). Das Wortzeichen „Hund“ genügt, um über Unterschiede von Hunden und Katzen zu sprechen (auch wenn man sich im „Hinterkopf“ vielleicht einen „Schäferhund“ als „Mittelpunkt“ der Objektmenge „Hund“ vorstellt, von dem Exemplare anderer Hunderassen mehr oder weniger weit abweichen).

2. Identifizierungsschemata versus exemplarische Fälle – einige (kritische) weiterführende Bemerkungen zum Ansatz von Ross & Makin, [17]

Mit Ross & Makin kann man abstrakte Ideen (Identifizierungsschemata, die bei ihnen Prototypen heißen) von exemplarischen Fällen (objektbezogenen „Veranschaulichungen“) unterscheiden. Erstere entsprechen dem, was Weingartner in Anschluss an Frege als *Intension* bezeichnet, letztere der *Extension* einer Begriffsbildung (vgl. [5], [22]).

Identifizierungsschemata und exemplarische Fälle lassen allerdings keine klaren Abgrenzungen zu, die *eindeutig* Objekte bzw. die sie repräsentierenden (kognitiven) Kategorien dem einen *oder* dem anderen Begriff zuordnen. Sie entsprechen eher „normischen Gesetzen“ (vgl. [18], [19]), d.h. Fällen (Modellen, Begriffen), die extensional („ganzheitlich“) bzw. intensional (analytisch-kategorisierend, dimensionierend) die meisten Übereinstimmungen mit den gemeinten Einsetzungsinstanzen aufweisen (und am wenigstens mit intendierten Nichtmitgliedern der entsprechenden Klasse) und somit eine „zentrale Tendenz“ mit unscharfen Abgrenzungen zu entsprechenden („ähnlichen“) Objekten bzw. Ideen („Vorstellungen“) repräsentieren.

Das hier zu behandelnde „Prototypenmodell“ erlaubt, einen expliziten (messbaren) Übereinstimmungsgrad (similarity) zwischen kognitiver Repräsentation und einem Vertreter darzustellen (vgl. [6], [7], [17]*).*

2.1. Auswertungsfunktion für Elemente bei gegebener Kategorie

Im „Prototypenmodell“ von Ross & Makin werden die Bestandteile der kognitiven Repräsentation als Dimensionen, und die Vertreterkandidaten als Elemente einer Grundmenge betrachtet. Unter der Annahme, dass die Kategorie K durch n Kriterien/Dimensionen bestimmt ist, werden Gewichtungsfaktoren g_i ($0 \leq g_i \leq 1$, $i = 1, \dots, n$) zu den einzelnen Kriterien nach der Bedeutsamkeit (für den entsprechenden konzeptuellen Bereich) zugeordnet. Ein Vertreter V wird bezüglich jeder Dimension von K durch einen Übereinstimmungsgrad v_i ($0 \leq v_i \leq 1$, $i = 1, \dots, n$)

ausgewertet. Der Übereinstimmungsgrad von V bezüglich K wird als eine gewichtete Summe der dimensionalen Auswertung bestimmt:

$$S(K,V) = \sum_{i=1}^{n} g_i v_i.$$

Nach dieser Formel werden die Elemente der Grundmenge bezüglich einer Kategorie auf die Menge der reellen Zahlen abgebildet. Bei einem gewissen Wert von $S(K,V)$ trifft man die Entscheidung, ob das Objekt V zur Kategorie K gehört und als idealer/guter Vertreter brauchbar ist. Je größer der Wert $S(K,V)$ ist, desto „näher" steht der Vertreter dem „Zentrum" der Kategorie. Das ermöglicht das Einordnen der zu überprüfenden Elemente nach dem Abstand vom „Zentrum" der Kategorie. Ein Prototyp als idealer Vertreter stellt somit die zentrale Tendenz der Kriterien/Dimensionen (bzw. der diesen zuordenbaren Testitems) dar. (Eine entsprechende Belegung dieser Definition ist mit Tabelle 1 und Diagramm 1 im Punkt 5 über konvexe Vierecke gegeben.)

Bemerkungen, Weiterentwicklungen bzw. Weiterentwicklungsmöglichkeiten des Modells

- *Die Zuordnung der Gewichtungsfaktoren setzt eine gewisse Strukturierung der Kriterien, vor allem eine Vergleichbarkeit, irgendeine Relation*[2] *zwischen den Kriterien (z.B. größere oder kleinere „Bedeutung" bezüglich des Konzepts, von Lehrerpräferenzen, . . .) voraus. Die Autoren führen das Problem der Vergleichbarkeit der Kriterien auf die Ordnungsrelation der reellen Zahlen zurück, indem zu jedem Kriterium je eine Zahl zwischen* 0 *und* 1 *irgendwie schon früher zugeordnet wurde. Für die praktische Anwendung des Modells ist es sehr wichtig,* ***wie*** *diese Zahlen den Kriterien zugeordnet werden können. Am Beispiel aus der Mathematikdidaktik (siehe unten das Beispiel*

[2]Eine Äquivalenzrelation impliziert eine vollständige Zerlegung der Grundmenge in paarweise disjunkte Klassen. Eine Klasse enthält die untereinander äquivalenten Elemente und wird durch ein beliebiges Element vollwertig repräsentiert, die Elemente einer Klasse sind untereinander austauschbar. Diese Austauschbarkeit gilt übrigens nur innerhalb der Äquivalenzrelation. Beispiel: Obwohl $5/3$ und $(-5)/(-3)$ den gleichen Wert haben und deswegen die rationale Zahl $5/3$ beide repräsentieren können, lassen sie sich nicht austauschen, falls überdies der Zähler größer als der Nenner sein soll.
In realen Situationen sind die Elemente untereinander mindestens subjektiv vergleichbar, aber das Ergebnis der Vergleiche lässt sich nicht verketten, also die einzuführende Relation ist nicht transitiv. Relationen, die reflexiv, symmetrisch und nicht unbedingt transitiv sind, nennen wir Toleranzrelationen (vgl. [3]). Durch eine Toleranzrelation werden auch Klassen gebildet, diese Klassen sind aber nicht unbedingt disjunkt, die Klassenmitglieder sind nur in beschränkter Weise austauschbar.

über konvexe Vierecke, Tab. 2) zeigen wir einen möglichen Weg auf, wie z.B. durch differenzierte Vergabe von Gewichtungsfaktoren (etwa nach relativer Häufigkeit des Zutreffens von Kriterien) feinstrukturierte Fundierungen von Fundamentums- und Additumszielen möglich sind (Tab. 3).

- *Das Auswahlkriterium – nach einem (additiven) Skalarwert – ist für jede Kategorie einzeln zu bestimmen, da der Funktionswert von der Anzahl der Dimensionen sehr stark abhängig ist.*
- *Bei einer mathematischen Definition, wo die Kriterien meistens notwendig und hinreichend sind, ist jeder Gewichtungsfaktor durch* 1 *zu ersetzen und* $S(K,V)=n$ *vorzuschreiben. (Das Fehlen einer Eigenschaft können die anderen nicht ersetzen.) Ein Auswahlkriterium nach einer multiplikativen Funktion der Kriteriumswerte scheint für notwendige Kriterien effektiver zu sein. Dazu sind noch Simulationen und Experimente nötig.*
- *Bei der intensionalen Erweiterung der Kategorie oder wenn es sich um mehrere Kategorien handelt, die das Probeobjekt enthalten könnte, wäre eine Normierung nötig. (Damit die* $S(K,V)$*-Werte sich vergleichen lassen bzw. als Gewichtungsfaktoren einer Teilkategorie dienen können.)*
- *Für die Erweiterung des Modells, wonach ein Objekt bezüglich mehrerer Kategorien ausgewertet werden soll, wäre es nötig die Granuliertheit der Kategorien zu koordinieren und die Voraussetzungen des Übergangs auf „Wahrscheinlichkeiten" zu sichern. (Die Gesamtwahrscheinlichkeit sollte z.B. über die Vereinigung der Dimensionen gemäß ihrer Bedeutung verteilt und innerhalb der Einzelkategorien umstrukturiert werden.)*

2.2. Klassifikationsfunktion für exemplarisch identifizierte Klassen, Entstehen der Kategorien

Die Kategorienbildung durch exemplarische Fälle (nach „prominenten" Kontextmodellen) beruht im „Kategorienmodell der exemplarischen Fälle" von Ross & Makin auf der Annahme, dass eine (intensionale) Kategorie aus einer (extensionalen) Menge von („Objekten") Exemplaren besteht und dass neue Objekte als mögliche Einsetzungsinstanzen auf Grund ihrer „Ähnlichkeit" (in unserer Terminologie nach ihrem Übereinstimmungsgrad) zu den bereits bekannten Exemplaren dieser Kategorie hinzugefügt werden (z.B. [1], [9], [13], [14], vgl. z. T. zusammenfassend [17]).

Wird der ideale Vertreter der Kategorie nach Grad der Zugehörigkeit als gewichtete Summe von dimensionalen Übereinstimmungen errechnet, so stellt das

Modell des exemplarischen Falles die Zusammenfassung aller Objekte als Einsetzungsinstanzen dar, wobei jede Einsetzungsinstanz mit *derselben Menge von Dimensionen* beschrieben wird (während die Werte von Objekt zu Objekt bestimmt werden müssen). Dabei werden die Merkmale umstrukturiert, einige als bestimmende, andere als nebensächliche deklariert, und dadurch entsteht „das Zentrum", der „Ähnlichste", der beste Vertreter der Klasse. Objekte, die auf allen (mehreren) Kriterien (gut) „passen", werden als „zentrale" Objekte bezeichnet. Schon die *schwache* Übereinstimmung mit *einer* Dimension kann als *geringe* Ähnlichkeit interpretiert werden (auch wenn das Objekt bezüglich der anderen Dimensionen gut passt).

Ein neues Objekt/Beispiel B wird mit jedem von den bereits gespeicherten (alten) Objekten A nach jeder Dimension i ($i = 1, \ldots, n$) verglichen. Passt B zu A nach der Dimension i (die bei allen Objekten dieselbe sein muss), dann wird $p_i = 1$ gesetzt. Falls B nicht zu A in dieser Hinsicht i passt, wird die Probe durch $p_i = 0$, oder bei feinerer Auswertung $p_i = n_i$ $(0 \leq n_i < 1)$ ausgewertet. Der Übereinstimmungsgrad zwischen A und B wird durch eine multiplikative Funktion *der Kriterien/Dimensionen* beschrieben:

$$Z(A, B) = \prod_{i=1}^{n} p_i.$$

Der Grad der „Zugehörigkeit" des Beispiels B bezüglich der Klasse A wird als Summe der Übereinstimmungsgrade zwischen ihren Elementen A ($A \in \mathcal{A}$) und B ermittelt:

$$Z(\mathcal{A}, B) = \sum_{A \in \mathcal{A}} Z(A, B).$$

Damit wird ein „ganzheitlicher" Objektbezug hergestellt. Ein neues Beispiel muss zu allen bekannten Klassenelementen nach jeder Dimension (mehr oder weniger) passen, nicht nur zu bestimmten zentralen Kriterien. Bei der zweiwertigen Auswertung sieht man das am besten, da das Fehlen der Übereinstimmung bezüglich einer Dimension einen Nullfaktor bedeutet, und dadurch das ganze Produkt annulliert wird. Ein kleiner Wert n_i $(0 \leq n_i < 1)$ bringt einen ähnlichen Effekt hinein, verkleinert das ganze Produkt, vermindert die Bedeutung von anderen Übereinstimmungen. Nach der Summe über alle Klassenmitglieder kann man den zentralen Bereich der Klasse bestimmen.

Bemerkungen, Weiterentwicklungen bzw. Weiterentwicklungsmöglichkeiten des Modells

- *Neben den motivationalen Vorteilen (z.B. hinsichtlich subjektiver Auswahlmöglichkeiten der Lernenden) der exemplarischen Klassifikation sollten doch* *auch die kognitiven Schwierigkeiten betrachtet werden: Bei der sukzessiven Erweiterung der Klasse (ausgehend von Einzelobjekten, die als „Ganzheiten" nebeneinander stehen) muss das organisierende Konzept, das Auswahlkriterium, während des Prozesses erfunden werden – z.B. durch Analogiebildung (vgl. auch „das dialektische Problem" bei Dörner,* [2]*). Ohne Zerlegung der Einzelstruktur eines Quadrates würde niemand ein Rechteck und ein Quadrat begrifflich zusammenfügen (was bei Kleinkindern oft der Fall ist). Das zentrale Element ist also ein guter Vertreter der Kategorie, es ist aber (alleine) ungeeignet die Kategorie exemplarisch zu identifizieren (vgl. Tab. 4).*

- *Die Klassifikation durch exemplarische Fälle ermöglicht die individuell bestimmte, selektive Anwendung der Erfahrung auf den aktuellen Bereich, und macht dadurch den Weg der Abstraktion auch für Personen mit geringerem Abstraktionsvermögen (mindestens teilweise, auf dem Fundamentumsniveau) zugänglich (vgl. das Modell der Inneren Differenzierung, Herber & Vásárhelyi* [8]*).*
- *Mit Hilfe einer Klassifikation durch exemplarische Fälle entstehen Querverbindungen zwischen Kategorien durch „Brückenelemente", die gleichzeitig zu mehreren Kategorien gehören. Dabei werden die Merkmale der Kategorien und des Verbindungselements deutlicher (siehe z.B. die Vierecksklassifikation von Fatalin* [3]*, bzw. Kap. 5. der vorliegenden Arbeit).*
- *Durch vielfältige exemplarische (äußere) Repräsentationen einer Kategorie wird die individuelle (innere) Repräsentation (auch als Erinnerungshilfe) und die Vernetzung von Kategorien erleichtert (Vásárhelyi,* [21]*).*
- *Die durch exemplarische Fälle konstruierte Klasse ist von der Zusammensetzung, Reihenfolge der Beispiele und der dabei vermittelten Informationen abhängig. Es ist leicht möglich, dass die (nach Fehlvorstellung, ohne Konzept) ausgewählten Beispiele sich nicht zur Kategorie erweitern lassen (Einzelbeispiele, zerfallende „Klassen", exemplarisch ausgewählte Einzeldimensionen).*
- *Anhand unseres Beispiels kann man den Einfluss des Startobjekts nachvollziehen. Obwohl das Quadrat das Zentrum der Kategorie konvexer Vierecke darstellt, ist es nicht geeignet die Kategorie exemplarisch zu generieren. Manche Klassen lassen sich durch ein Element gar nicht erzeugen (vgl. 5.2).*

Empirische Experimente von Ross & Makin zeigen, dass die kriterienbedingte und die Sichtweise auf exemplarische Fälle in der Praxis gemischt auftreten. Auch von einem wissenschaftstheoretischen Standpunkt aus kann eine Verbindung zwischen beiden Annäherungsweisen hergestellt werden: Im Sinne normischer Gesetze

([18], [19]) treten kategorienbedingt „passendere“ Beispiele „normalerweise“ statistisch häufigen auf: Schwalben sind auch z.B. kriterial/dimensional besser mit den anderen Vögeln „vernetzt“ als Pinguine oder der „Vogel Strauß“.

3. Der Prototypbegriff aus didaktischer Sicht

Beispiele für eine exemplarisch konstruierte Kategorie werden rascher identifiziert als analytisch definierte (abstrakte) Kriterien hierfür (vgl. [20], passim). Anschauliche Repräsentationen (Agglomerationen – vorstellbar wie zufallsgenerierte Geröllhalden, ikonische Identifizierungshilfen, niedrigere Granuliertheit, Grobstruktur der Eigenschaften, wie beim „Bildlesen“) von ganzheitlichen objektbezogenen Systemen sind dem menschlichen Denken und Wahrnehmen offensichtlich näher als Bündelungen aus abstrakten (intensionalen) Begriffskategorien (Dimensionenbündel). Günstig für die (elaborierte) Einspeicherung ist auch die je individuelle (kontextuelle) Zusatzinformation (anders dimensionierbare Vernetzung) der konkreten Beispiele, die in der Konstruktion prototypischer Strukturen als „unwesentlich“ weggelassen werden (von denen dekontextualisiert wird, die vorläufig außer Acht gelassen werden, die aber gelegentlich hervorrufbar sind). Auf die Bedeutung der sogenannten „Randbedingungen“ bei der Begriffsbildung ist schon von Lewin hingewiesen worden (vgl. [12]):

Dimensionen als abstrakt definierte „Intensionals“ bleiben sachlogisch ident, Objekte können – je nach Kontext, Problemstellung – unterschiedlich dimensioniert (unter verschiedenen Aspekten betrachtet) werden. Exemplarische Darstellungen durch Einzelvertreter können allerdings die kriterienbedingte Klassifikation nicht ersetzen (siehe unten das Beispiel über die Klassifikation von konvexen Vierecken). Entsprechend fruchtbar waren die kriterienbedingten Klassifikationsansätze – im Sinne von „default hierarchies“ (Holland et al. [10]) – bei Mendelejew (Periodensystem der Chemie) bzw. Hull („Principles of behavior“, [11]).

Beim schulischen Lernen soll aber nicht nur „irgendeine spontane Klassifikation“ für die subjektive Strukturierung der Kenntnisse, sondern auch die Vermittlung eines *didaktischen Prototyps* (der anhand der Erwartungen der Gesellschaft, der systematisch erfassten kognitiven und motivationalen Lernvoraussetzungen der Schüler, etc. die Ableitung eines wissenschaftlich kontrollierten, ganzheitlichvernetzten Systemmodells ermöglicht, erleichtert bzw. sichert, siehe Abbildung 2) durchgeführt werden. Auf der Basis des didaktischen Prototyps soll das Konzept der fachlich aufeinander abgestimmten Lernebenen konkretisiert, in ein Gesamtsystem integriert werden.

4. Der didaktische Prototyp

Nach unserer Grundvorstellung (siehe Abbildung 2) wird ein Prototyp in didaktischen Zusammenhängen generiert

(1) als Einsetzungsinstanz der einschlägigen Sachstruktur (möglichst) nach Forschungsstand,

(2) als Einsetzungsinstanz des (sozial-)wissenschaftlichen Forschungsstandes, der die spezifischen Bedingungen individuellen wie kollektiven Lernens und Lehrens zu beschreiben und zu erklären sucht,

(3) als direkte (vorwissenschaftlich „wahr"-genommene) Einwirkung „der" Realität.

Ein didaktischer Prototyp (etwa als Unterrichtseinstieg) versucht also nach bestmöglicher sachlogischer und psychologisch/soziologischer Analyse eine möglichst „nahe" Verbindung zwischen sachlogischer Struktur des Gegenstandes und kognitiven wie emotional-motivationalen Strukturen und Funktionen bei den konkret Lernenden und Lehrenden herzustellen, um die In-Beziehungs-Setzung beider (z.B. durch Analogiebildung) zu erleichtern. In Abbildung 2 werden mögliche Transformationsschritte in Bezug auf die Konstruktion eines (situations-)spezifischen didaktischen Prototyps dargestellt. Ausgehend von der sachlogischen Struktur eines Gegenstandes der entsprechenden Wissenschaft(en) einerseits (möglichst auf Forschungsstand), von den realen individuellen wie kollektiven Bedingungen sowie deren sozialwissenschaftlich fundierten Bedingungsanalysen andererseits (betreffend individuell wie kollektiv gemeinte Akteure, z.B. Schüler und Lehrer, mediale Strukturen, wie Bücher oder Computerprogramme, institutionell verankerte Unterrichtsformen, etc.) lassen sich dynamische Sequenzen (Wege) vom Pol der sachlogischen Struktur(en) zum Pol der individuellen und sozialen Bedingungen bzw. deren sozialwissenschaftlich entsprechenden Strukturen vice versa als spezifische didaktische Prototypen identifizieren, die sich auf jeder dieser Ebenen in besonderer Weise darstellen, auch wenn sie – diese ebenenspezifischen Abbildungsmodelle eines gemeinsamen Weges, des jeweiligen didaktischen Prototyps – untereinander interaktiv verbunden sind oder sich (potentiell) verbinden lassen.

Der Inhalt des Gegenstandes wird grundsätzlich nach der inneren Logik der aktuellen Wissenschaft (ihrer Hintergrundsaxiome) eingeordnet. Anhand der pädagogischen Traditionen wird der wissenschaftliche Standpunkt im Sinne der Gesamtzielsetzung (Kenntnisse, Wissenserweiterung, Vermittlung von Wertehierarchien, Fähigkeitsentwicklung, etc.) zum didaktischen Prototyp transformiert. Der

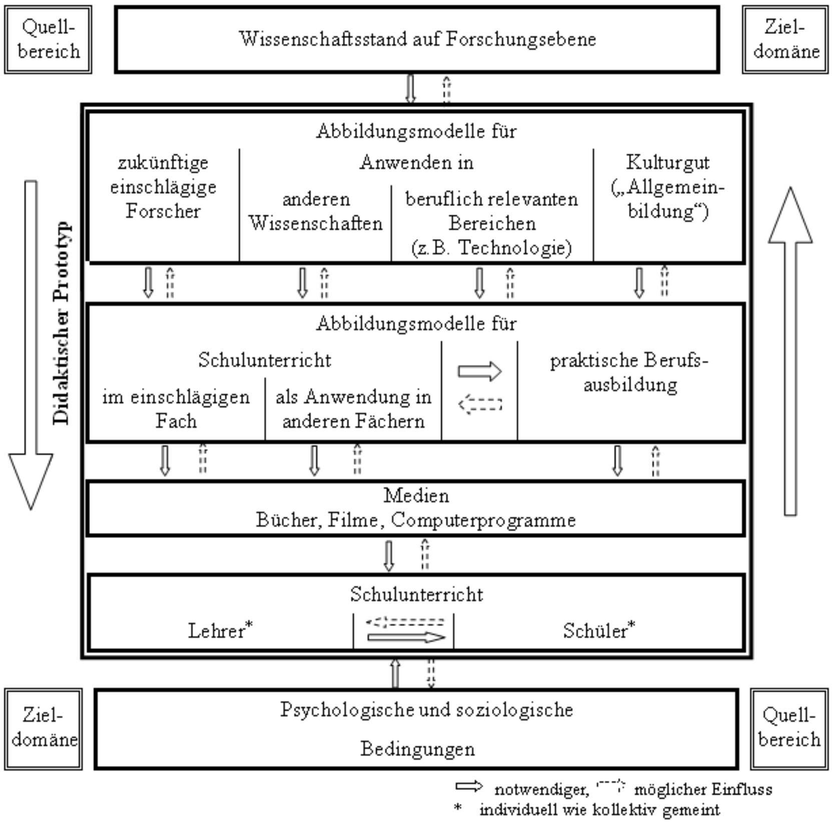

Abbildung 2. Wechselwirkung Wissenschaft – didaktischer Prototyp – Gesellschaft

Prototyp enthält Grundelemente (Begriffe, Eigenschaften, Fakten, Erfahrungen, Methoden, Experimente, Verfahren, Gesetzmäßigkeiten, Zusammenhänge, Regeln mit ihren Querverbindungen) des Stoffes, Schülertätigkeiten, die mentale Auseinandersetzung mit dem Stoff, etc. – das alles muss durch pädagogische und psychologische Aspekte strukturiert werden.[3]

Am Beispiel „Konvexe Vierecke“ zeigen wir, wie eine Ableitung vom wissenschaftlichen Standpunkt (unter Einbeziehung entwicklungspsychologischer Aspekte) zum didaktischen Prototyp – gemäß Abbildung 2 – möglich ist (vgl. 5.3).

[3]Um dieses komplexe System erkennen, anwenden und (weiter-)entwickeln zu können, wurde von Vásárhelyi, Fatalin und Varsics (vgl. [3]) ein computerunterstütztes Modell entwickelt, das die Darstellung und Untersuchung der Lehrstoffstruktur effektiv und anschaulich ermöglicht.

5. Konvexe Vierecke – ein Klassifikationsbeispiel aus der Mathematikdidaktik

Als Grundmenge betrachten wir die konvexen Vierecke. Einige konvexe Vierecke haben einen eigenen Namen, weil sie außer Konvexität weitere spezielle Eigenschaften besitzen:

Trapez, symmetrisches Trapez, Drachen, Parallelogramm, Rhombus, Rechteck, Quadrat, Sehnenviereck, Tangentenviereck.

Als Kriterien/Dimensionen betrachten wir die metrischen und die Symmetrie-Eigenschaften, die in Ungarn lehrplangemäß bis zur Matura zu untersuchen sind.

Bezüglich der Seiten:

- (mindestens) ein paralleles Seitenpaar
- (mindestens) ein gleichlanges Seitenpaar
- zwei parallele Seitenpaare
- zwei gleichlange Seitenpaare
- nur gleichlange Seiten

Bezüglich der Diagonalen:

- gleichlange Diagonalen
- zueinander senkrechte Diagonalen
- einander halbierende Diagonalen

Bezüglich der Winkel:

- (mindestens) ein gleichgroßes Winkelpaar
- zwei gleichgroße Winkelpaare
- nur gleichgroße Winkel

Bezüglich der Symmetrie:

- Punktsymmetrie
- (mindestens) eine Achsensymmetrie bezüglich einer Diagonale
- (mindestens) eine Achsensymmetrie bezüglich einer Mittelsenkrechten
- zwei Achsensymmetrien bezüglich der Diagonalen
- zwei Achsensymmetrien bezüglich der Mittelsenkrechten
- zwei Achsensymmetrien bezüglich einer Diagonale und bezüglich einer Mittelsenkrechten

Bezüglich In- bzw. Umkreis:

- Umkreis
- Inkreis

5.1. Kriterienbedingte Klassifikation

Wir definieren eine einfache Relation zwischen obigen zwei Mengen (der Menge der konvexen Vierecke und der Menge der Kriterien) nach dem Vorhandensein der jeweiligen Eigenschaft. Die Tabelle 1 enthält in den Zeilen die Vierecke (die Elemente der Kategorie), in den Spalten die Kriterien und in den Zwischenzellen (in der Kreuzung einer Zeile und einer Spalte) die Information, ob diese miteinander in Relation stehen, d.h. ob das Viereck die aktuelle Eigenschaft aufweist.

(a) *Bewertungsfunktion der Kategorie „Konvexe Vierecke"*

Im Sinne des Modells von Ross & Makin kann die Tabelle so interpretiert werden, dass alle Gewichtungsfaktoren gleich 1 sind und die Übereinstimmung durch 0 oder 1 bewertet wird. Damit erhalten wir die Bewertungsfunktion $S(K,V)$ der Kategorie „Konvexe Vierecke" (Tabelle 1).

(b) *Normierte Bewertungsfunktion der Kategorie „Konvexe Vierecke"*

Um die aus der Tabelle 1–2 ablesbaren didaktischen Folgerungen anschaulicher zu machen, führen wir weitere Messwerte ein, die sich aus der Tabelle ableiten lassen.

- Die normierte Bewertungsfunktion $S_0(K,V) = S(K,V)/n$ bedeutet den Anteil der erfüllten Eigenschaften (statt deren Anzahl), dadurch wird dieser Indikator von der Anzahl der definierenden Kriterien weniger abhängig.
- Der Abstand des Einzelelements vom Zentrum der Kategorie (vom Quadrat) wird nach der Formel Abstand $(K,V) = 1 - S_0(K,V)$ ermittelt.
- Bezüglich der „Wichtigkeit" der einzelnen Eigenschaften können wir Anstöße aus den absoluten Häufigkeiten – und noch mehr aus den relativen Häufigkeiten – bekommen.

Die Tabelle 2 enthält die neuen Werte und die Abstandsverhältnisse sind im Diagramm 1 veranschaulicht. (Die Eigenschaften sind nur durch Nummern angedeutet.)

(c) *Bewertungsfunktion der Kategorie mit relativen Häufigkeiten als Gewichtungsfaktoren*

In Tabelle 1 wurde die Bewertungsfunktion nach der Annahme definiert, dass die Eigenschaften bei der Bestimmung der Kategorie die gleiche Rolle

Tabelle 1. Konvexe Vierecke und ihre Eigenschaften mit der Bewertungsfunktion $S(K, V)$. (Vollständige Kategorienbezeichnungen siehe oben.)

Konvexe Vierecke	**metrische Eigenschaften**											**Symmetrieeigenschaften**						**Kreise**		$\boldsymbol{S(K,V)}$
	Seite					**Diagonale**			**Winkel**											
	(mind.) ein paralleles Seitenpaar	zwei parallele Seitenpaare	(mind.) ein gleichlanges Seitenpaar	zwei gleichlange Seitenpaare	nur gleichlange Seiten	gleichlange Diagonalen	zueinander senkrechte Diagonalen	einander halbierende Diagonalen	(mind.) ein gleichgroßes Winkelpaar	zwei gleichgroße Winkelpaare	nur gleichgroße Winkel	Punktsymmetrie	(mind.) eine Achsensymmetrie (Diagonale)	zwei Achsensymmetrien (Diagonalen)	(mind.) eine Achsensymmetrie (Mittelsenkrechte)	zwei Achsensymmetrien (Mittelsenkrechten)	zwei Achsensymmetrien (Diagonale und Mittelsenkrechte)	Inkreis	Umkreis	**Bewertungsfunktion**
Trapez	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Symm. Trapez	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	7
Drachen	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	6
Parallelogramm	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	8
Rhombus	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	13
Rechteck	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	13
Quadrat	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	19
Sehnenviereck	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
Tangentenviereck	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1

spielen. Die Häufigkeitswerte in der Tabelle 2 zeigen aber das Gegenteil: Es gibt Eigenschaften, die nur bei einem Gebilde, wieder andere, die bei 2/3 aller Beispiele der Kategorie vorkommen. Auf Grund dieser Erfahrung können wir die Bewertungsfunktion verfeinern. Wir betrachten die relativen Häufigkeiten als Gewichtungsfaktoren. Bei der Definition der normierten Bewertungsfunktion benutzen wir die Summe der Gewichtungsfaktoren, so bleibt das Quadrat

Tabelle 2. Die normierte Bewertungsfunktion $S_0(K,V)$ der konvexen Vierecke mit den Abstands- und Häufigkeitsverhältnissen.

Gebilde	**Kriterien**																			**Bewertungsfunktionen**		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$S(K,V)$	$S_0(K,V)$	$1-S_0(K,V)$
Trapez	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$\frac{1}{19}$	$\frac{18}{69}$
symmetrisches Trapez	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	7	$\frac{7}{19}$	$\frac{12}{19}$
Drachen	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	6	$\frac{6}{19}$	$\frac{13}{19}$
Parallelogramm	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	8	$\frac{8}{19}$	$\frac{11}{19}$
Rhombus	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	13	$\frac{13}{19}$	$\frac{6}{19}$
Rechteck	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	13	$\frac{13}{19}$	$\frac{6}{19}$
Quadrat	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	19	$\frac{19}{19}$	0
Sehnenviereck	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	$\frac{1}{19}$	$\frac{18}{19}$
Tangentenviereck	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	$\frac{1}{19}$	$\frac{20}{19}$
abs. Häufigkeit	6	4	6	5	2	3	3	4	6	5	2	4	3	2	3	2	1	4	4			
relative Häufigkeit	$\frac{6}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$			

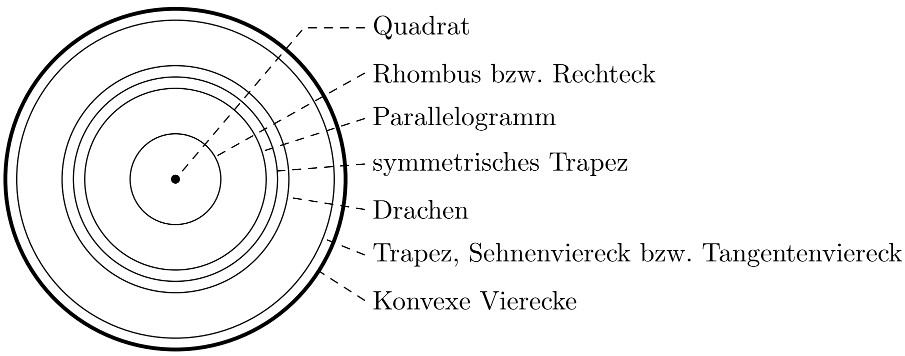

Diagramm 1. Die Abstandsverhältnisse innerhalb der Kategorie „Konvexe Vierecke". Diese Darstellung darf aber nicht als Venn-Diagramm interpretiert werden. Es wurde nur festgelegt, dass ein Element durch einen Punkt des jeweiligen Kreises repräsentiert wird, wir wissen aber nicht, ob jeder Punkt ein Element repräsentiert. Die in dem größeren Kreis enthaltenen Elemente des kleineren Kreises gehören nicht unbedingt zu Klassen, die irgendwo im größeren Kreis liegen.

das zentrale Element der Kategorie. Die verfeinerten Werte sind in der Tabelle 3 zu finden.

Tabelle 3. Gewichtungsfaktoren nach der relativen Häufigkeit der Erfüllung des aktuellen Kriteriums (letzte Zeile der Tabelle 2). Der Normierungsfaktor ist die Summe der Gewichtungsfaktoren aller 19 Dimensionen. Der normierte Funktionswert $S_0(K,V)$ bedeutet jetzt das Verhältnis zum Funktionswert beim Quadrat. Der Abstand des Einzelelements vom Zentrum der Kategorie (Quadrat) wurde wieder nach der Formel Abstand $(K,V) = 1 - S_0(K,V)$ ermittelt.

Gebilde	**Kriterien**																			**Bewertungsfunktionen**		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$S(K,V)$	$S_0(K,V)$	$1-S_0(K,V)$
Trapez	$\frac{6}{9}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{6}{9}$	$\frac{6}{69}$	$\frac{63}{69}$
symmetrisches Trapez	$\frac{6}{9}$	0	$\frac{6}{9}$	0	0	$\frac{3}{9}$	0	0	$\frac{6}{9}$	$\frac{5}{9}$	0	0	0	0	$\frac{3}{9}$	0	0	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{33}{9}$	$\frac{33}{69}$	$\frac{36}{69}$
Drachen	0	0	$\frac{6}{9}$	$\frac{5}{9}$	0	0	$\frac{3}{9}$	0	$\frac{6}{9}$	0	0	0	$\frac{3}{9}$	0	0	0	0	$\frac{4}{9}$	0	$\frac{27}{9}$	$\frac{27}{69}$	$\frac{42}{69}$
Parallelogramm	$\frac{6}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{5}{9}$	0	0	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{5}{9}$	0	$\frac{4}{9}$	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{40}{9}$	$\frac{40}{69}$	$\frac{29}{69}$
Rhombus	$\frac{6}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{5}{9}$	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	0	0	$\frac{4}{9}$	0	$\frac{54}{9}$	$\frac{54}{69}$	$\frac{15}{69}$
Rechteck	$\frac{6}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{5}{9}$	0	$\frac{3}{9}$	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	0	0	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{54}{9}$	$\frac{54}{69}$	$\frac{15}{69}$
Quadrat	$\frac{6}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{69}{9}$	1	0
Sehnenviereck	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{69}$	$\frac{65}{69}$
Tangentenviereck	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{4}{9}$	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{69}$	$\frac{65}{69}$

Wir vergleichen die Abstandsverhältnisse (Tabelle 4): Durch die neue Vergabe der Gewichtungsfaktoren liegen die Figuren „Trapez“, Tangenten- bzw. Sehnenviereck, die im ersten Modell gleichen Abstand hatten (vgl. Diagramm 1), nun unterschiedlich weit vom Zentrum entfernt. Ein Trapez liegt also dem Zentrum (Quadrat) näher als ein (beliebiges) Tangenten- bzw. Sehnenviereck, obwohl das Quadrat selber ein Tangenten- und Sehnenviereck ist. Diese Änderung entspricht der Meinung von Lehrern, wonach es bei der Klassifikation von konvexen Vierecken „weniger bedeutend“ ist, einen In- bzw. Umkreis zu besitzen, als ein paralleles Seitenpaar zu haben. Es lohnt also auch didaktisch, durch differenziertere Gewichtungen Lehrziele zu hierarchisieren (zwischen Fundamentums- und Additumszielen zu unterscheiden).

Die (logische) Symmetrie des Modells (gleichlange Seiten, gleichgroße Winkel) kann man in der Tatsache wieder erkennen, dass das Rechteck und das Rhombus weiterhin zusammen bleiben, obwohl man intuitiv den Verwandtschaftsgrad zwischen Quadrat und Rechteck höher als zwischen Quadrat und Rhombus einschätzt. Wenn ein auf die Spitze gestelltes Quadrat im Unterricht öfter gezeichnet würde, wäre diese zweite Verwandtschaft auch eine Erfahrungssache.

Tabelle 4. Änderung des Abstandes durch Modifikation der Gewichtungsfaktoren.

	Abstand vom Zentrum bei		Änderung
	gleichmäßig verteilten Gewichtungsfaktoren	nach der relativen Häufigkeit verteilten Gewichtungsfaktoren	
Trapez	0,94	0,91	−0,03
symmetrisches Trapez	0,63	0,52	−0,11
Drachen	0,68	0,60	−0,08
Parallelogramm	0,57	0,42	−0,15
Rhombus	0,31	0,21	−0,10
Rechteck	0,31	0,21	−0,10
Quadrat	0	0	0
Sehnenviereck	0,94	0,94	0
Tangentenviereck	0,94	0,94	0

5.2. Durch Beispiele generierte Klassen, Entstehen der Kategorie „Konvexe Vierecke“

Nach dem in 2.2 beschriebenen Modell untersuchen wir, welches Viereck welche Klasse generiert. Dazu legen wir ein „Urmuster“, ein Ausgangsviereck fest und überprüfen jedes konvexe Viereck als „Probeobjekt“ nach den dimensionalen Eigenschaften des Urmusters. Die Übereinstimmung in einer Eigenschaft wird durch 1 und das Gegenteil durch 0 bewertet (zweiwertige Bewertung mittels 1 und 0 im Sinne von „passt dazu“ bzw. „passt nicht dazu“). Da im Modell von Ross & Makin der „Zugehörigkeitsgrad“ eines Probeobjektes durch die Formel $Z(A,B) = \prod_{i=1}^{n} p_i$ ermittelt wird, *gehört ein Probeviereck zu der Klasse des Urmusters, wenn das Probeobjekt jede Eigenschaft des Urmusters aufweist.*

Tabelle 5 enthält wegen der besseren Überschaubarkeit nur die positive Antwort (den Funktionswert 1). Die Tabelle ist nicht symmetrisch, sie ist zeilenweise zu lesen. In einer Zeile stehen die Elemente der durch das ausgewählte „alte“ Objekt generierten Klasse.

Wie der Tabelle zu entnehmen ist, kann die vollständige Kategorie durch ein einziges Beispiel nicht generiert werden. Die größte Klasse wurde nicht durch das zentrale Element (Quadrat), sondern durch das Trapez generiert (das vom Zentrum relativ weit entfernt liegt).

Das Trapez, das Tangentenviereck und das Sehnenviereck gehören *nur* zu einer (selbst generierten) Klasse. (Ein Objekt generiert eine solche Klasse, deren Elemente alle dimensionalen Eigenschaften des Objekts aufweisen. Da alle anderen Objekte mindestens zwei Kriterien erfüllen, können die Objekte mit einer einzigen dimensionalen Eigenschaft nicht dazu „passen“.)

Daraus folgt, dass diese drei Objekte für die exemplarische Identifizierung der Kategorie unbedingt nötig sind. Das Diagramm 2 veranschaulicht die komplexe Struktur der Menge von konvexen Vierecken nach der obigen exemplarischen Identifikation.

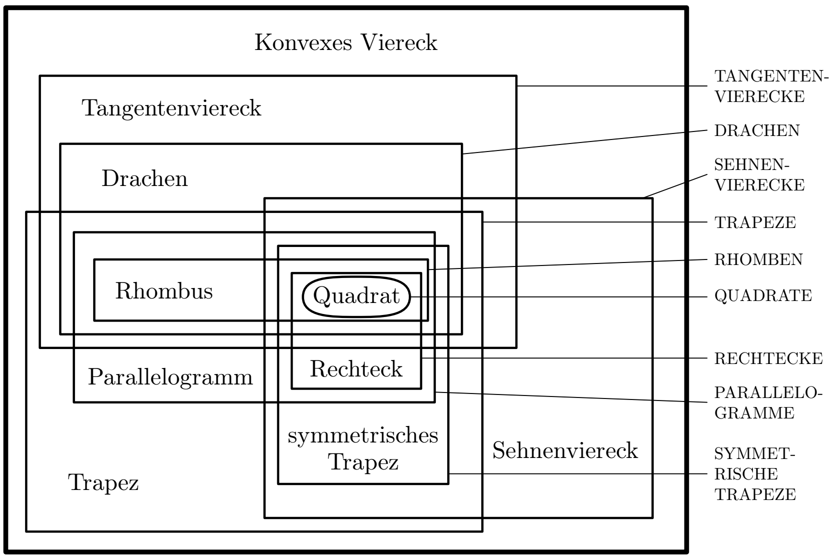

Diagramm 2. Die komplexe Struktur der Kategorie „Konvexe Vierecke“

Tabelle 5. Die exemplarisch generierten Klassen der konvexen Vierecke. (Am Rand sind die Klassen, in den Zeilen rechts die „Generatoren“ bezeichnet.)

		Probeobjekt									generierte Klasse
		Trapez	symm. Trapez	Drachen	Parallelogramm	Rhombus	Rechteck	Quadrat	Sehnenviereck	Tangentenviereck	
Altes Objekt	Trapez	1	1		1	1	1	1			Trapez, symm. Trapez, Parallelogramm, Rhombus, Rechteck, Quadrat
	symm. Trapez		1				1	1			symm. Trapez, Rechteck, Quadrat
	Drachen			1		1		1			Drachen, Rhombus, Quadrat
	Parallelogramm				1	1	1	1			Parallelogramm, Rhombus, Rechteck, Quadrat
	Rhombus					1		1			Rhombus, Quadrat
	Rechteck						1	1			Rechteck, Quadrat
	Quadrat							1			Quadrat
	Sehnenviereck		1				1	1	1		Sehnenviereck, symm. Trapez, Rechteck, Quadrat
	Tangentenviereck			1		1		1		1	Tangentenviereck, Drachen, Rhombus, Quadrat

5.3. Didaktischer Prototyp – der Weg zur komplexen Struktur

Bei der Klassifikation von konvexen Vierecken kann der didaktische Prototyp nach unterschiedlichen mathematischen Präferenzrichtungen (z.B. Eigenschaften bezüglich Metrik oder Symmetrie) aufgebaut werden.

In der Grundschule und in der Sekundarstufe I werden die Einzelobjekte (Quadrat, Rechteck, Trapez, Parallelogramm) aus entwicklungspsychologischen Gründen konkret-manipulativ bezüglich Symmetrieeigenschaften untersucht und geordnet. In der Sekundarstufe II werden mehr die metrischen Eigenschaften forciert.

Die kritische Frage dabei ist, ob die komplexe Struktur (die bis zur Matura aufzubauen ist) als Synthese von zwei Präferenzrichtungen (Symmetrie- und metrischen Eigenschaften) abgeleitet werden kann. Das rechnerische Verfahren entspricht besser dem weiterentwickelten Differenzierungs- und Abschätzungsvermögen komplexer Verhältnisse (in jüngeren Entwicklungsstadien quantifiziert man die konkrete Einsetzungsinstanz, also absolutistisch-übergenau). Die Zusammenführung beider Wege (der symmetrischen bzw. metrischen Präferenzrichtung) sollte über einen geeigneten didaktischen Prototyp (potentielle) Konflikte zwischen beiden minimieren.

Um die exemplarische Identifizierung von konvexen Vierecken mit Symmetrieeigenschaften beschreiben zu können, betrachten wir diejenige Kriterien (Spalten der Tabelle 1), die Symmetrieeigenschaften vorschreiben. Die anderen Spalten werden gelöscht. Die Objekte, deren Zeile nach dem Löschen der nicht symmetriebezogenen Spalten leer wird, gehören nicht zur Kategorie der symmetrischen konvexen Vierecke, also werden sie auch gelöscht. Die neue Relationentabelle und die daraus folgende Klassenbildung sind in der Tabelle 6 dargestellt. Das Diagramm 3 zeigt die so erhaltene Struktur.

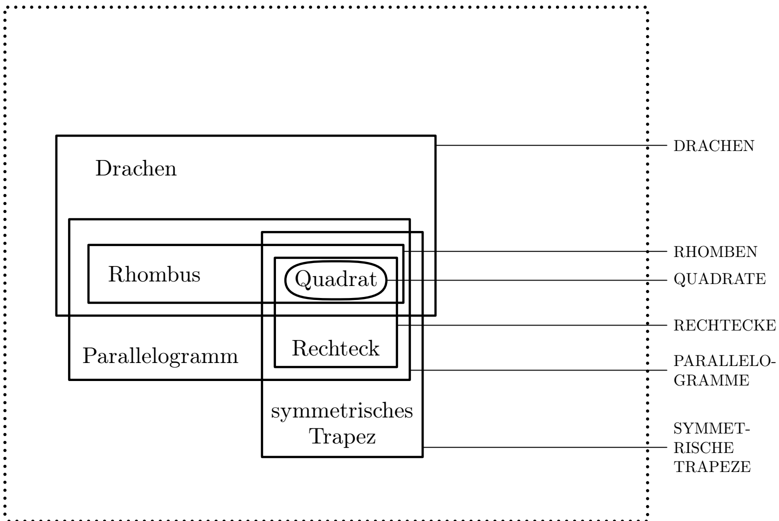

Diagramm 3. Die Struktur von konvexen Vierecken mit Symmetrieeigenschaften.

Tabelle 6. Konvexe Vierecke mit Symmetrieeigenschaften.

Objekt	**Symmetrie-Dimension**								**Probeobjekt**						**Klasse**
	Punktsymmetrie	(mind.) eine Symmetrieachse – Diagonale	zwei Symmetrieachsen – Diagonalen	(mind.) eine Symmetrieachse – Mittelsenkrechte	zwei Symmetrieachsen – Mittelsenkrechten	zwei Symmetrieachsen – Diagonale und Mittelsenkrechte	**Urmuster**		symmetrisches Trapez	Drachen	Parallelogramm	Rhombus	Rechteck	Quadrat	
symm. Trapez	0	0	0	1	0	0		symm. Trapez	1				1	1	symm. Trapez, Rechteck, Quadrat
Drachen	0	1	0	0	0	0		Drachen		1		1		1	Drachen, Rhombus, Quadrat
Parallelogramm	1	0	0	0	0	0		Parallelogramm			1	1	1	1	Parallelogramm, Rhombus, Rechteck, Quadrat
Rhombus	1	1	1	0	0	0		Rhombus				1		1	Rhombus, Quadrat
Rechteck	1	0	0	1	1	0		Rechteck					1	1	Rechteck, Quadrat
Quadrat	1	1	1	1	1	1		Quadrat						1	Quadrat

Dasselbe Verfahren wiederholen wir ausgehend von der Tabelle 1 bezüglich der metrischen Kriterien. Die Relationentabelle und die Klassenbildung sind mit der Tabelle 7 nachvollziehbar. Das Diagramm 4 zeigt, dass sich die Erweiterung mit Hilfe metrischer Kriterien durch eine Ergänzung des Diagramms 3 veranschaulichen lässt. Die zusätzliche Klasse, die Klasse der „TRAPEZE“, kommt dadurch in die Struktur.

Tabelle 7. Konvexe Vierecke mit metrischen Eigenschaften und die exemplarische Klassenbildung nach metrischen Eigenschaften.

Objekt	**metrische Eigenschaft**										
	Seite					**Diagonale**			**Winkel**		
	(mind.) ein paralleles Seitenpaar	zwei parallele Seitenpaare	(mind.) ein gleichlanges Seitenpaar	zwei gleichlange Seitenpaare	nur gleichlange Seiten	gleichlange Diagonalen	zueinander senkrechte Diagonalen	einander halbierende Diagonalen	(mind.) ein gleichgroßes Winkelpaar	zwei gleichgroße Winkelpaare	Nur gleichgroße Winkel
Trapez	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
symm. Trapez	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
Drachen	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0
Paralle-logramm	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0
Rhom-bus	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
Recht-eck	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1
Quadrat	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Urmus-ter	**Probeobjekt**							**gene-rierte Klasse**
	Trapez	symmetrisches Trapez	Drachen	Parallelogramm	Rhombus	Rechteck	Quadrat	
Trapez	1	1		1	1	1	1	Trapez, symm. Trapez, Parallelo-gramm, Rhombus, Rechteck, Quadrat
symm. Trapez		1				1	1	symmet-risches Trapez, Rechteck, Quadrat
Drachen			1		1		1	Drachen, Rhombus, Quadrat
Paralle-logramm				1	1	1	1	Parallelo-gramm, Rhombus, Rechteck, Quadrat
Rhom-bus					1		1	Rhombus, Quadrat
Rechteck						1	1	Rechteck, Quadrat
Quadrat							1	Quadrat

Das Vorhandensein des In- bzw. Umkreises kann man auch als metrische Kriterien formulieren: Die Summen der Längen gegenüberliegender Seiten bzw. der Größen gegenüberliegender Winkel sind gleich. Werden die Kriterien dadurch erweitert, bekommen wir die Klassen „Tangenten- bzw. Sehnenvierecke".

Die kategorienbedingte, komplexe Struktur von konvexen Vierecken wurde somit durch mehrschrittige didaktische Prototypen gewonnen (vgl. die Diagramme 2, 3 und 4).

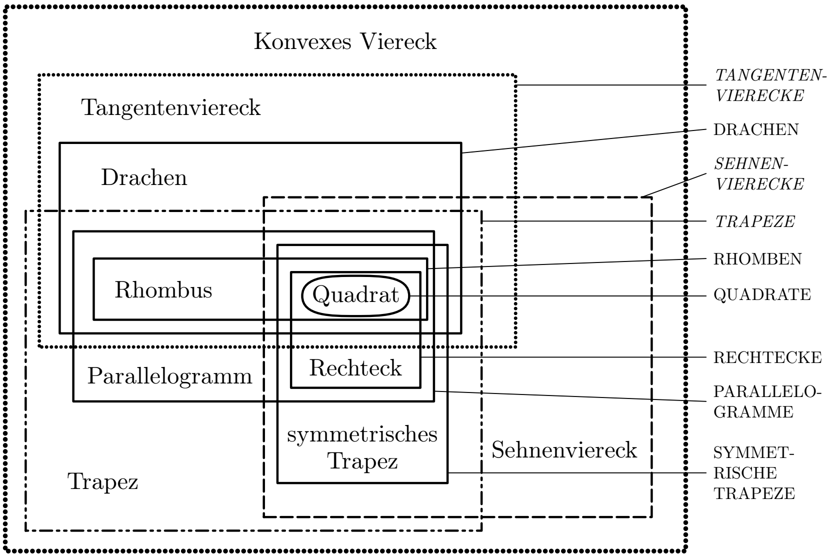

Diagramm 4. Die Struktur von konvexen Vierecken als Erweiterung der Struktur nach Symmetrie-Eigenschaften durch metrische oder metrisch formulierte weitere Eigenschaften.

Die Darstellung und die Analyse der Feinstruktur des Lernstoffes erhöhen die Durchschaubarkeit der Lernziele und erleichtern die Konstruktion von entsprechenden didaktischen Prototypen. Durch komplexe Analysen der Relationen zwischen der Menge von Begriffen und der Menge ihrer gesetzmäßigen Zusammenhänge (wir trennen absichtlich den Begriff als Ganzen von den ihn definierenden Kriterien), zwischen Begriffs- und Eigenschaftsmengen, zwischen verschiedenen Begründungsrelationen des Begriffsaufbaus, zwischen Begriffen und „entsprechend" operationalisierten Schülertätigkeiten im Zusammenhang mit konkreten Lerneinheiten sind weitere Informationen in Richtung Leistungsanalyse, Wissensnetz und Diagnostik zu erwarten.

Literatur

[1] L. Brooks, Nonanalytic concept formation and memory for instances, in: *Cognition and categorization*, (E. Rosch & B. B. Lloyd, eds.), Erlbaum, Hillsdale, 1978, 169–211.

[2] D. Dörner, Effekte zur Übung und der reflektierten Strategieanwendung auf die Problemlösefähigkeit, in: *Bericht über den 30. Kongress der Deutschen Gesellschaft für Psychologie (Regensburg 1976)*, (W. H. Tack, eds.), Hogrefe, Göttingen, 1977.

[3] L. Fatalin, Strukturelle Analyse des Lernstoffes, in: *Neue Sichtweisen in der Didaktik der Mathematik*, (K. J. Parisot, É. Vásárhelyi, eds.), Abakus, Salzburg, 2003, 45–56.

[4] J. J. Franks, J. D. Bransford, Abstraction of visual patterns, *Journal of Experimental Psychology* **90** (1971), 65–74.

[5] G. Frege, Über Sinn und Bedeutung, in: *Funktion, Begriff, Bedeutung – Fünf logische Studien. Herausgegeben von G. Patzig*, (G. Frege, ed.), Verlag Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1892, 7. Auflage, 1994.

[6] J. A. Hampton, Prototype models of concept representation, in: *Categories and concepts: Theoretical views and inductive data analysis*, (I. Van Mechelen, R. S. Hampton, R. S. Michalski & P. Theuns, eds.), Academic Press, London, 1993, 67–95.

[7] J. A. Hampton, Testing the prototype theory of concepts, *Journal of Memory and Language* **34** (1995), 686–708.

[8] H.-J. Herber, É. Vásárhelyi, Das Unterrichtsmodell „Innere Differenzierung einschließlich Analogiebildung" – Aspekte einer empirisch veranlassten Modellentwicklung, *Salzburger Beiträge zur Erziehungswissenschaft* **6**, no. 2, 2002, 5–19.

[9] D. L. Hintzman, „Schema abstraction" in a multiple-trace model, *Psychological Review* **93** (1986), 411–428.

[10] J. H. Holland, K. J. Holyoak, R. E. Nisbett & P. R. Thagard, *Induction*, The MIT Press, Cambridge, 1986.

[11] C. L. Hull, *Principles of behavior*, Appleton-Century-Crofts, New York, 1943.

[12] K. Lewin, Gesetz und Experiment in der Psychologie, (Erstdruck in Symposion. Philosophische Zeitschrift für Forschung und Aussprache. Band I, 1927, 375–421), Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1967.

[13] D. L. Medin, M. M. Schaffer, Context theory of classification learning, *Psychological Review* **85** (1978), 207–238.

[14] R. M. Nosofsky, Relation between the rational model and the context model of categorization, *Psychological Science* **2** (1991), 416–421.

[15] J. Piaget, *Psychologie der Intelligenz*, Klett-Cotta, Stuttgart, 1980.

[16] M. I. Posner, *Kognitive Psychologie*, Juventa, München, 1976, (Originalausgabe: „Cognition. An Introduction", Scott, Foresman and Company, Glenview, 1974).

[17] B. H. Ross, V. S. Makin, Prototype versus exemplar models in cognition, in: *The nature of cognition*, (R. J. Sternberg, ed.), A Bradford Book, Cambridge, 1999, 205–241.

[18] G. Schurz, Normic laws. Nonmonotonic reasoning and philosophy of science, Salzburg, 2000, SFB F012, Forschungsmitteilungen 1.

[19] G. Schurz, Was ist „normal"? Normische Gesetze und ihre evolutionstheoretische Begründung, Salzburg, 2001, SFB F012, Forschungsmitteilungen 15.

[20] R. J. Sternberg (ed.), *The nature of cognition*, A Bradford Book, Cambridge, 1999.

[21] É. Vásárhelyi, Paralleler Einsatz von traditionellen Anschauungsmitteln und Computeranimationen als Strategie für Problemlösen, in: *Creativity and Mathematics Education (Tagungsband)*, Münster, 1999, 270–273.

[22] P. Weingartner, *Wissenschaftstheorie II, 1. Grundlagenprobleme der Logik und Mathematik*, Stuttgart-Bad Cannstatt, 1976.

ÉVA VÁSÁRHELYI
EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
BUDAPEST
HUNGARY
AND
PARIS LODRON UNIVERSITÄT
SALZBURG
AUSTRIA

E-mail: vasar@ludens.elte.hu

E-mail: Eva.Vasarhelyi@sbg.ac.at

(Received February, 2006)