4/1 (2006), 71–88
tmcs@inf.unideb.hu
http://tmcs.math.klte.hu

Teaching Mathematics and Computer Science

Würfel und Augensummen – ein unmögliches Paar

Stefan Götz

Abstract. It is well known that the values $2, 3, \ldots, 12$ of the sum of eyes that appear when throwing two regular dice are not equally distributed. It can also be shown that no matter how the dice are falsified (or if only one of them is being manipulated) they can never reach the same probability concerning the sum of eyes ([8], 91 et seq.). This discovery can be generalized for $n \geq 2$ dice. Various results of algebra and (real) calculus are used, so that a connection between two different mathematical fields can be realized. Such a connection is typical and often provides a large contribution for mathematics (because it frequently leads to a successful attempt of solving a special problem) and therefore examples of this sort should also be included in the mathematical education at schools as well as in the student teachers' university curriculum for the study of mathematics.

Key words and phrases: probability generating functions, uniform distribution, dice, problem-solving, mathematical miniature, non existence proof by contradiction.

ZDM Subject Classification: H29, I29, I39, K59, K69, M19.

1. Einleitung

Das Würfeln und Beobachten der geworfenen Augenzahl ist eines der Paradebeispiele für ein Zufallsexperiment mit leicht einsehbarem Resultat. Aus der Kenntnis der Geometrie eines Würfels kann die Gleichwahrscheinlichkeit für jede Augenzahl angenommen werden, wenn man entsprechende Eigenschaften wie z. B. Homogenität des Würfelmaterials voraussetzt (Laplace-Würfel). Dass diese Gleichwahrscheinlichkeit keineswegs selbstverständlich ist, zeigt schon das Werfen von zwei (fairen) Würfeln und das Beobachten der geworfenen Augensumme: „7“

tritt öfter auf als „2" oder „12", eine darauf folgende Analyse liefert auch den Grund dafür: Bekanntlich existieren mehr Möglichkeiten, die Augensumme „7" zu realisieren (nämlich sechs), als „2" (nämlich eine).

Historisch bedeutsam ist in diesem Zusammenhang eines der Probleme, die Chevalier de Méré [1607–1684 (?)] formulierte: „Beim gleichzeitigen Werfen dreier symmetrischer (unterscheidbarer) Spielwürfel müssen die Chancen für das Auftreten der Augensumme 11 und der Augensumme 12 gleich groß sein, denn sowohl für die Augensumme 11 als auch für die Augensumme 12 gibt es jeweils sechs verschiedene Möglichkeiten: 6–4–1, 6–3–2, 5–5–1, 5–4–2, 5–3–3, 4–4–3 bzw. 6–5–1, 6–4–2, 6–3–3, 5–5–2, 5–4–3, 4–4–4." Tatsächlich beobachtete er aber in der Spielpraxis, dass die Augensumme 11 häufiger auftrat als die Augensumme 12. Blaise Pascal (1623–1662) klärte dieses Phänomen, indem er bemerkte, dass die eben genannten Realisierungsmöglichkeiten zu gewichten seien: 6–4–1 kann auf $3! = 6$ verschiedene Arten zustande kommen, 4–4–4 dagegen auf nur eine (nach [7], S. 11 ff.). Diese und andere Fragestellungen haben ja (u. a.) die wissenschaftliche Beschäftigung mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Problemen eingeleitet.

Man könnte nun auf die Idee kommen, die Gleichwahrscheinlichkeit der verschiedenen Ausprägungen der Augensumme von zwei (oder mehr) Würfeln dadurch zu erzwingen, dass die einzelnen Würfel gezielt verfälscht werden (realisiert etwa durch Materialinhomogenitäten). Das soll heißen, dass dann die einzelnen Augenzahlen bei mindestens einem Würfel nicht mehr mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ auftreten (müssen), dafür aber die Augensumme einer Gleichverteilung gehorcht. Im Folgenden wird gezeigt, dass dies nicht möglich ist. Dazu werden wir auf so genannte erzeugende Funktionen zurückgreifen, die eine Brücke von der Stochastik hin zur (reellen) Analysis schlagen. Das Verwenden von Methoden und Argumenten aus verschiedenen mathematischen Gebieten zur Bearbeitung einer bestimmten Problemstellung ist ein wesentliches Charakteristikum der Mathematik und sollte daher auch im Mathematikunterricht bzw. in der Ausbildung der Lehramt Mathematik Studierenden vorkommen. Allerdings ist es nicht ganz einfach, geeignete Themen dafür zu finden, also solche, die keine allzu komplexen oder langen Bearbeitungen nach sich ziehen. Ein Beitrag dazu soll hier geleistet werden.

2. Erzeugende Funktionen – ein Exkurs

Definition. Eine diskrete Zufallsvariable X habe den Wertevorrat $W_X = \mathbb{Z}_+$ mit $\mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \dots\}$ und besitze die Verteilung $\{p_i : i \in \mathbb{Z}_+\}$. Dann heißt

$$G_X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i \cdot p_i$$

erzeugende Funktion G_X der Zufallsvariablen X (wenn die Potenzreihe konvergiert).

Die Kenntnis dieser Funktion für eine bestimmte Zufallsvariable erlaubt es, die Verteilung derselben vollständig zu rekonstruieren.

Wegen

$$|G_X(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1 \quad \text{mit } |t| \leq 1$$

existiert G_X jedenfalls für $|t| \leq 1$. Hat die Zufallsvariable X einen endlichen Wertevorrat aus $\mathbb{Z}_+$ (was in dieser Arbeit immer der Fall sein wird), dann ist die erzeugende Funktion ein Polynom und sie konvergiert für alle $t \in \mathbb{R}$.

Wir sehen weiters wegen $t^0 = 1 \ \forall t \in \mathbb{R}$

$$G_X(0) = p_0.$$

Differenzieren von G_X nach t für $|t| < 1$ ergibt

$$G'_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot t^{i-1} \cdot p_i,$$

an der Stelle null ist somit

$$G'_X(0) = p_1.$$

Nochmaliges Differenzieren liefert

$$G''_X(t) = \sum_{i=2}^{\infty} i \cdot (i-1) \cdot t^{i-2} \cdot p_i,$$

die entsprechende Auswertung wieder an der Stelle null bringt

$$G''_X(0) = 2 \cdot p_2$$

mit sich.

Allgemein halten wir

$$G_X^{(n)}(0) = n! \cdot p_n \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots$$

fest, und daher folgt die Verteilung von X aus der Kenntnis von G_X. Weitere Eigenschaften und Anwendungen erzeugender Funktionen können in vielen Standardwerken zur Stochastik nachgelesen werden, wie z. B. [6], §7, [1], S. 80 f. oder [2], 7.1.

Die Schwierigkeit bei den erzeugenden Funktionen besteht nun darin, geschlossene Ausdrücke für G_X zu finden, wenn X eine konkrete vorliegende Zufallsvariable mit den geforderten Eigenschaften ist. Schließlich sei der für unsere Zwecke wichtige Satz zitiert:

Sind X und Y unabhängige Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{Z}_+$, so gilt für die erzeugenden Funktionen für X, Y und $X+Y$ und $|t| \leq 1$

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t) \cdot G_Y(t).$$

Mittels vollständiger Induktion kann dieses Resultat auf n unabhängige Zufallsvariable ausgedehnt werden ([2], S. 139 f.).

Bemerkung. Haben die Zufallsvariablen X und Y jeweils nur einen endlichen Wertevorrat aus $\mathbb{Z}_+$, dann gilt die Gleichung $G_{X+Y}(t) = G_X(t) \cdot G_Y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (sogar für alle $t \in \mathbb{C}$).

3. Zwei Münzen – Propädeutik

Eine nahe liegende Frage im Zusammenhang mit dem eingangs erwähnten Problem ist natürlich, ob zwei Münzen mit der Beschriftung „1“ und „2“ so verfälscht werden können (bzw. eine von ihnen), dass die möglichen „Augensummen“ $2, 3, 4$ gleichwahrscheinlich werden. Mittels elementarer Algebra kann gezeigt werden, dass dies unmöglich ist. Dazu führen wir zwei Zufallsvariablen X_1 und X_2 ein, die die geworfenen „Augenzahlen“ der beiden Münzen beschreiben. Sie sind (stochastisch) unabhängig voneinander:

$$\mathrm{P}(X_1 = i, X_2 = j) = \mathrm{P}(X_1 = i) \cdot \mathrm{P}(X_2 = j) \quad \forall i, j = 1, 2.$$

Wir setzen

$$\mathrm{P}(X_1 = i) =: p_i \quad \text{und} \quad \mathrm{P}(X_2 = j) =: q_j, \quad i, j = 1, 2.$$

Wir wünschen uns für die beiden Münzen

$$\begin{aligned} p_1 \cdot q_1 &= \frac{1}{3} \\ p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1 &= \frac{1}{3} \\ p_2 \cdot q_2 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$(p_1, q_1, p_2, q_2 \neq 0)$, was aber nicht erfüllt werden kann:

Wegen

$$p_1 = \frac{1}{3 \cdot q_1} \quad \text{und} \quad p_2 = \frac{1}{3 \cdot q_2}$$

wäre

$$\frac{1}{3 \cdot q_1} \cdot q_2 + \frac{1}{3 \cdot q_2} \cdot q_1 = \frac{1}{3},$$

was

$$\frac{{q_2}^2 + {q_1}^2}{q_1 \cdot q_2} = 1$$

zur Folge hätte.

Das kann aber nicht sein: Es ist nämlich

$$\begin{aligned} (a-b)^2 &\geq 0 \\ a^2 + b^2 &\geq 2 \cdot a \cdot b \\ \frac{a^2 + b^2}{a \cdot b} &\geq 2 \end{aligned}$$

für $a, b \in \mathbb{R}$ und $\operatorname{sgn} a = \operatorname{sgn} b \neq 0$.

Diese Beweisidee geht für zwei Würfel analog durch: [5], S. 226. In [5] finden sich neben dem in Rede stehenden Problem für zwei Würfel auch andere Probleme zu diesem Themenkreis: S. 53 ff.

Wir wollen aber eine andere Beweisidee verfolgen. Die erzeugende Funktion der Zufallsvariablen $X_1 + X_2$ ist unter der Annahme, dass Gleichwahrscheinlichkeit für ihre Ausprägungen möglich ist,

$$G_{X_1+X_2} = \sum_{k=2}^{4} \frac{1}{3} \cdot t^k = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=2}^{4} t^k.$$

Die erzeugenden Funktionen für die einzelnen Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien

$$G_{X_1}(t) = \sum_{i=1}^{2} t^i \cdot p_i \quad \text{und} \quad G_{X_2}(t) = \sum_{j=1}^{2} t^j \cdot q_j,$$

nach dem oben zitierten Satz besteht folgender Zusammenhang:

$$G_{X_1+X_2}(t) = G_{X_1}(t) \cdot G_{X_2}(t).$$

Im nächsten Abschnitt wird dies auch auf elementare Weise nachgerechnet. Damit bekommen wir

$$\frac{1}{3} \cdot (t^2 + t^3 + t^4) = \sum_{i=1}^{2} p_i \cdot t^i \cdot \sum_{j=1}^{2} q_j \cdot t^j.$$

Division durch $t^2 \neq 0$ ergibt

$$\frac{1}{3} \cdot (1 + t + t^2) = \sum_{i=1}^{2} p_i \cdot t^{i-1} \cdot \sum_{j=1}^{2} q_j \cdot t^{j-1} = (p_1 + p_2 \cdot t) \cdot (q_1 + q_2 \cdot t).$$

Für $t_0 = -\frac{p_1}{p_2} \in \mathbb{R}$ ist $p_1 + p_2 \cdot t_0 = 0$. Dann müsste aber auch $1 + t_0 + {t_0}^2 = 0$ sein. Das ist aber unmöglich: Das Polynom $1 + t + t^2$ hat keine reelle Nullstelle, wie wir an $t_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}$ leicht sehen können. Die Annahme, dass wir zwei solche Münzen finden können, muss also fallen gelassen werden.

4. Zwei Würfel – der Anfang

Dieser Abschnitt wird in [8], S. 91 f. beschrieben. Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 beschreiben die geworfenen Augenzahlen der beiden Würfel. Sie sind ebenfalls (stochastisch) unabhängig voneinander:

$$\mathrm{P}(X_1 = i, X_2 = j) = \mathrm{P}(X_1 = i) \cdot \mathrm{P}(X_2 = j) \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, 6.$$

Wir setzen

$$\mathrm{P}(X_1 = i) =: p_i \quad \text{und} \quad \mathrm{P}(X_2 = j) =: q_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6.$$

(Für einen fairen Würfel wäre $p_i = \frac{1}{6} \ \forall i = 1, 2, \dots, 6$.)

Damit ist

$$\sum_{i=1}^{6} p_i = 1 = \sum_{j=1}^{6} q_j \quad \text{und} \quad 0 \leq p_i, q_j \leq 1 \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, 6.$$

So gerüstet formulieren wir mit

$$G_{X_1}(t) = \sum_{i=1}^{6} t^i \cdot p_i \quad \text{und} \quad G_{X_2}(t) = \sum_{j=1}^{6} t^j \cdot q_j$$

die beiden zugehörigen erzeugenden Funktionen. Ihr Produkt ist gleich der erzeugenden Funktion der geworfenen Augensumme der beiden Würfel:

$$G_{X_1+X_2}(t) = G_{X_1}(t) \cdot G_{X_2}(t)$$

nach oben.

Dies kann natürlich auch elementar nachgerechnet werden:

Sei $\mathrm{P}(X_1 + X_2 = k) =: r_k$ mit $k \in \{2, 3, \ldots, 12\}$. Dann ist wegen

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_1 + X_2 = k) &= r_k = \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{P}(X_1 = i, X_2 = k - i) = \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{P}(X_1 = i) \cdot \mathrm{P}(X_2 = k - i) = \sum_{i=1}^{k-1} p_i \cdot q_{k-i} \\
G_{X_1+X_2}(t) &= \sum_{k=2}^{12} t^k \cdot r_k = \sum_{k=2}^{12} \left(\sum_{i=1}^{k-1} p_i \cdot q_{k-i} \right) \cdot t^k = \\
&= \sum_{i=1}^{6} p_i \cdot t^i \cdot \sum_{j=1}^{6} q_j \cdot t^j = G_{X_1}(t) \cdot G_{X_2}(t).
\end{aligned}$$

(Dabei ist $p_i = q_j = 0 \;\; \forall i, j \notin \{1, 2, \ldots, 6\}$.)

Konkret wollen wir nun annehmen, dass die einzelnen Würfel so abgeändert („verfälscht“) werden (oder wenigstens einer davon), dass

$$\mathrm{P}(X_1 + X_2 = k) = \frac{1}{11} \quad \forall k \in \{2, 3, \ldots, 12\}.$$

Damit bekommen wir

$$\frac{1}{11} \cdot \sum_{k=2}^{12} t^k = \sum_{i=1}^{6} t^i \cdot p_i \cdot \sum_{j=1}^{6} t^j \cdot q_j .$$

Division durch $t^2 \neq 0$ liefert

$$\frac{1}{11} \cdot \sum_{k=2}^{12} t^{k-2} = \sum_{i=1}^{6} t^{i-1} \cdot p_i \cdot \sum_{j=1}^{6} t^{j-1} \cdot q_j . \tag{1}$$

Für die höchste vorkommende Potenz von t sehen wir mittels Koeffizientenvergleichs ein, dass

$$p_6 > 0 \quad \text{und} \quad q_6 > 0$$

sein muss wegen $p_6 \cdot q_6 = \frac{1}{11}$. (Beide negativ geht nicht, da es sich um Wahrscheinlichkeiten handelt.) Damit ist

$$\lim_{t \to \pm\infty} \sum_{i=1}^{6} t^{i-1} \cdot p_i = \pm\infty,$$

denn es handelt sich um ein Polynom ungeraden (fünften) Grades. Der Nullstellensatz sagt uns, dass es ein $t_0 \in \mathbb{R}$ geben muss, sodass

$$\sum_{i=1}^{6} {t_0}^{i-1} \cdot p_i = 0 \tag{2}$$

ist.

Gleichung (1) lehrt uns, dass auch

$$\frac{1}{11} \cdot \sum_{k=2}^{12} {t_0}^{k-2} = 0$$

gelten muss.

Jetzt können wir aber mit Hilfe der Summenformel für die endliche geometrische Reihe leicht explizit berechnen:

$$\frac{1}{11} \cdot \frac{{t_0}^{11} - 1}{t_0 - 1} = 0. \tag{3}$$

Das kann aber nicht sein, weil ${t_0}^{11} = 1$ in $\mathbb{R}$ $t_0 = 1$ impliziert, und das würde in (2) eingesetzt $\sum_{i=1}^{6} p_i = 0$ bedeuten: ein Widerspruch zu $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$.

Ein analytisches Argument ist, dass $f\colon t \mapsto f(t) := \frac{t^{11}-1}{t-1}$ keine reelle Nullstelle besitzt. An der Stelle 1 besitzt f eine hebbare Unstetigkeitsstelle, wir bilden dazu den Grenzwert

$$\lim_{t \to 1} f(t) = \lim_{t \to 1} \frac{t^{11} - 1}{t - 1} = \lim_{t \to 1} (1 + t + \cdots + t^{10}) = 11$$

(siehe dazu auch [4], S. 242 f.).

Die Gleichung $t^{11} = 1$ hat eine reelle und zehn echt-komplexe Lösungen z_l: In der Polardarstellung $z_l = \left(1; \frac{l \cdot 2\pi}{11}\right)$ $l = 0, 1, \ldots, 10$ sieht man das sofort ein.

Bemerkung. Man vergleiche dieses elegante Verfahren zur Erbringung des Unmöglichkeitsbeweises mit dem „auf der Hand liegenden“ Gleichungssystem, das die Annahme der Gleichverteilung der (Ausprägungen der geworfenen) Augensumme sofort suggeriert:

$$\begin{aligned}
p_1q_1 &= \frac{1}{11}\\
p_1q_2 + p_2q_1 &= \frac{1}{11}\\
p_1q_3 + p_2q_2 + p_3q_1 &= \frac{1}{11}\\
p_1q_4 + p_2q_3 + p_3q_2 + p_4q_1 &= \frac{1}{11}\\
p_1q_5 + p_2q_4 + p_3q_3 + p_4q_2 + p_5q_1 &= \frac{1}{11}\\
p_1q_6 + p_2q_5 + p_3q_4 + p_4q_3 + p_5q_2 + p_6q_1 &= \frac{1}{11}\\
p_2q_6 + p_3q_5 + p_4q_4 + p_5q_3 + p_6q_2 &= \frac{1}{11}\\
p_3q_6 + p_4q_5 + p_5q_4 + p_6q_3 &= \frac{1}{11}\\
p_4q_6 + p_5q_5 + p_6q_4 &= \frac{1}{11}\\
p_5q_6 + p_6q_5 &= \frac{1}{11}\\
p_6q_6 &= \frac{1}{11}.
\end{aligned}$$

Das sind elf Gleichungen mit zwölf Unbekannten, weiters muss natürlich noch $\sum_{i=1}^{6} p_i = \sum_{j=1}^{6} q_j = 1$ und $0 \le p_i, q_j \le 1 \ \ \forall i, j = 1, 2, \ldots, 6$ gelten. Die Aufgabe, die Unvereinbarkeit dieser (Un-)Gleichungen nachzuweisen, betont geradezu die Schlagkraft dieses analytischen Hilfsmittels, der erzeugenden Funktionen.

5. Eine erste Verallgemeinerung

Es liegt nun eine gerade Anzahl von Würfeln vor, sagen wir $2 \cdot n$ ($n \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$). Dann geht der Beweis von Abschnitt 4 genauso durch und wir landen schließlich bei

$$\frac{1}{5 \cdot 2 \cdot n + 1} \cdot \frac{{t_0}^{5 \cdot 2 \cdot n + 1} - 1}{t_0 - 1} = 0 \qquad (4)$$

analog zu (3). Wegen $5 \cdot 2 \cdot n + 1 = 10 \cdot n + 1$ ungerade kommt wieder nur $t_0 = 1$ in Frage, was aber aus denselben Gründen wie in Abschnitt 4 genannt nicht sein kann.

Allgemein gilt, dass $t^{2\cdot n+1} = 1 \ \ (n \in \mathbb{Z}_+)$ genau eine reelle Lösung hat, nämlich $z_1 = 1$. Die anderen $2 \cdot n$ sind echt-komplex, ihre Polardarstellung überzeugt uns davon: $z_l = \left(1; \frac{l\cdot 2\cdot\pi}{2\cdot n+1}\right)$, $l = 1, 2, \ldots, 2 \cdot n$ [„$(2 \cdot n + 1)$-te Einheitswurzeln"].

6. Drei Würfel und eine letzte Schwierigkeit

Auch jetzt folgen wir der Beweisidee von Abschnitt 4 und bekommen endlich

$$\frac{1}{16} \cdot \frac{{t_0}^{16} - 1}{t_0 - 1} = 0 \tag{5}$$

entsprechend (3). Als einzige reelle Nullstelle von $f: \ t \mapsto f(t) := \frac{t^{16}-1}{t-1}$ findet sich $t_0 = -1$, wie die Polardarstellung der Lösungen von $t^{16} = 1$ genau zeigt: $z_l = \left(1; \frac{l\cdot 2\cdot\pi}{16}\right)$, $l = 0, 1, \ldots, 15$. Die Lösung $z_0 = 1$ ist (wieder) keine Nullstelle von f, denn $f(t) = \frac{t^{16}-1}{t-1} = \sum_{i=0}^{15} t^i$, also ist $f(1) = 16 \neq 0$. Aber diese eine reelle Nullstelle $t_0 = -1$ genügt, um das bisher verwendete Argumentationsschema aus den Angeln zu heben:

Analog zu (2) erkennen wir aus

$$\sum_{i=1}^{6} p_i \cdot {t_0}^{i-1} = 0,$$

dass

$$\sum_{i=1}^{6} p_i \cdot (-1)^{i-1} = p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + p_5 - p_6 = 0$$

oder

$$p_1 + p_3 + p_5 = p_2 + p_4 + p_6$$

gelten muss, warum nicht? – Wir können daraus wegen $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$

$$p_2 + p_3 + p_5 = \frac{1}{2} = p_2 + p_4 + p_6$$

schließen, was auch keinen Widerspruch erkennen lässt. Ich nenne diese Sackgasse eine gutartige, weil wir doch nicht vergeblich gearbeitet haben: Wenn wir nochmals die Identität bezüglich der erzeugenden Funktionen betrachten [vgl. (1)],

$$\frac{1}{16} \cdot \frac{t^{16} - 1}{t - 1} = \sum_{i=1}^{6} p_i \cdot t^{i-1} \cdot \sum_{j=1}^{6} q_j \cdot t^{j-1} \cdot \sum_{k=1}^{6} r_k \cdot t^{k-1}, \tag{6}$$

wobei nun $r_k := \mathrm{P}(X_3 = k)$ ist $(k = 1, 2, \ldots, 6)$ und die Zufallsvariable X_3 die geworfene Augenzahl des dritten Würfels beschreibt, so wird klar, dass nicht nur das Polynom $\sum_{i=1}^{6} p_i \cdot t^{i-1}$ wenigstens eine reelle Nullstelle haben muss, sondern auch $\sum_{j=1}^{6} q_j \cdot t^{j-1}$ und $\sum_{k=1}^{6} r_k \cdot t^{k-1}$. Denn in jedem Fall handelt es sich um ein Polynom ungeraden Grades, da $p_6 > 0$, $q_6 > 0$ und $r_6 > 0$ gelten müssen (Koeffizientenvergleich für die höchste vorkommende Potenz von t, nämlich t^{15}). So stellen wir auf der rechten Seite von (6) mindestens drei reelle Nullstellen fest (eventuell mit ihren Vielfachheiten gezählt). Da die linke Seite von (6) aber genau eine reelle Nullstelle liefert und diese einfach ist, liegt ein Widerspruch vor. Also ist auch in diesem Fall gezeigt, dass die geworfene Augensumme von drei Würfeln niemals einer Gleichverteilung gehorchen kann, egal, wie sehr man die einzelnen Würfel verfälscht.

7. Eine zweite Verallgemeinerung

Nun können wir beruhigt den allgemeinen Fall für eine ungerade Anzahl von Würfeln angehen: Es werden $2 \cdot n + 1$ $(n \in \mathbb{N})$ Würfel geworfen. Wieder dem Beweis von Abschnitt 4 folgend ist

$$\frac{1}{5 \cdot (2 \cdot n + 1) + 1} \cdot \frac{{t_0}^{5 \cdot (2 \cdot n + 1) + 1} - 1}{t_0 - 1} = 0 \tag{7}$$

das vorläufige Ende, woraus wir $t_0 = -1$ wegen $5 \cdot (2 \cdot n + 1) + 1$ gerade als einzige reelle Lösung von (7) schließen. Denn die Gleichung $t^{2 \cdot n} = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ hat die $2 \cdot n$ Lösungen $z_l = \left(1; \frac{l \cdot 2 \cdot \pi}{2 \cdot n}\right)$, $l = 0, 1, \ldots, 2 \cdot n - 1$ [„$(2 \cdot n)$-te Einheitswurzeln“]. Damit ist $t_0 = -1$ auch einfache Nullstelle von $f \colon t \mapsto f(t) := \frac{t^{5 \cdot (2 \cdot n + 1) + 1} - 1}{t - 1}$. Analog zu (1) lautet nun die Identität bezüglich der erzeugenden Funktionen:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{5 \cdot (2 \cdot n + 1) + 1} \cdot \frac{t^{5 \cdot (2 \cdot n + 1) + 1} - 1}{t - 1} = \\ &\quad = \sum_{i=1}^{6} p_i^{(1)} \cdot t^{i-1} \cdot \sum_{j=1}^{6} p_j^{(2)} \cdot t^{j-1} \cdot \ldots \cdot \sum_{k=1}^{6} p_k^{(2 \cdot n + 1)} \cdot t^{k-1}, \end{aligned} \tag{8}$$

wobei $p_l^{(m)}$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass der m-te Würfel $(m = 1, 2, \ldots, 2 \cdot n + 1)$ die Augenzahl l $(l = 1, 2, \ldots, 6)$ anzeigt. Und damit sind wir fertig: Wie in Abschnitt 6 argumentieren wir, dass jedes der Polynome $\sum_{l=1}^{6} p_l^{(m)} \cdot t^{l-1}$ $(m = 1, 2, \ldots, 2 \cdot n + 1)$ wenigstens eine reelle Nullstelle haben muss. Damit wären auf der rechten Seite von (8) insgesamt (mit ihren Vielfachheiten gezählt) mindestens

$2 \cdot n + 1$ reelle Nullstellen festzustellen, dagegen ist links in (8) $t_0 = -1$ die einzige reelle Nullstelle und sie hat Vielfachheit eins. Beides kann nicht sein: Widerspruch.

8. Resümee

Der mathematische Kern dieses Unmöglichkeitsbeweises ist die Tatsache, dass das Kreisteilungspolynom $p(t) = t^n - 1$ $(n \in \mathbb{N})$ höchstens zwei reelle Nullstellen hat: $z_1 = 1$, wenn n ungerade ist, und $z_1 = 1$ und $z_2 = -1$, wenn n gerade ist. Zu diesem Kern führt uns die Summenformel für die endliche geometrische Reihe. Einmal mehr wird so die Wichtigkeit der geometrischen Reihe unterstrichen, sie ist eine der wenigen Reihen, die man explizit ausrechnen kann.

So weit zum analytischen Hintergrund dieses Unmöglichkeitsbeweises, die Brücke von der stochastischen Problemstellung zum mit analytischen Methoden geführten Beweis sind die erzeugenden Funktionen. Sie komprimieren die notwendige Information über eine diskrete Zufallsvariable. Daraus sind leicht durch Produktbildung die erzeugenden Funktionen für Summen von unabhängigen Zufallsvariablen zu bekommen. Dieses Zusammenspiel von Stochastik und Analysis zeigt exemplarisch und auf elementarem Niveau, wie fruchtbar die Vereinigung verschiedener mathematischer Gebiete sein kann. Insofern versteht sich dieser Beitrag als ein hochschuldidaktischer: Er zeigt eine typische mathematische Arbeitsweise.

Auch die Verallgemeinerung von zwei auf eine gerade Anzahl von Würfeln bzw. von zwei auf drei und dann auf eine ungerade Anzahl von Würfeln ist eine charakteristische mathematische Tätigkeit. Sie kann auch anhand folgender Überlegungen demonstriert werden: Das Tetraeder als ein weiteres reguläres konvexes Polyeder kommt ebenfalls als Laplace'sches Zufallsgerät aufgrund seiner regelmäßigen Form in Frage.

Betrachten wir nun zwei Tetraeder. Es sei $\mathrm{P}(X_1 = i) =: p_i$ und $\mathrm{P}(X_2 = j) =: q_j \;\; \forall i, j = 1, 2, 3, 4$, wobei die Zufallsvariable X_k die geworfene Augenzahl des k-ten Tetraeders beschreibt $(k = 1, 2)$. (Wir „würfeln" also wieder.) Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 sind natürlich unabhängig voneinander. Die geworfene Augensumme der beiden Tetraeder wird durch

$$G_{X_1+X_2}(t) = \frac{1}{7} \cdot \sum_{k=2}^{8} t^k = G_{X_1}(t) \cdot G_{X_2}(t) = \sum_{i=1}^{4} p_i \cdot t^i \cdot \sum_{j=1}^{4} q_j \cdot t^j$$

beschrieben, wenn wir uns $W_{X_1+X_2} = \{2, 3, \ldots, 8\}$ vor Augen halten und die Gleichwahrscheinlichkeit dieser Ausprägungen voraussetzen.

Division durch $t^2 \neq 0$ liefert (wieder)

$$\frac{1}{7} \cdot \sum_{k=2}^{8} t^{k-2} = \sum_{i=1}^{4} p_i \cdot t^{i-1} \cdot \sum_{j=1}^{4} q_j \cdot t^{j-1},$$

es ist $p_4 > 0$ und $q_4 > 0$ (Koeffizientenvergleich für t^6). Damit $\exists t_0 \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{i=1}^{4} p_i \cdot {t_0}^{i-1} = 0$ und daraus folgt

$$\frac{1}{7} \cdot \frac{{t_0}^7 - 1}{t_0 - 1} = 0.$$

Damit kommt nur $t_0 = 1$ in Frage, wir wissen, wozu dies führt: zu einem Widerspruch.

Auch drei Tetraeder können nicht so verfälscht werden (einzeln, zwei davon oder alle drei), dass sich Gleichwahrscheinlichkeit der Ausprägungen für die geworfene Augensumme einstellt. Angenommen, das geht doch, dann ergibt sich mit $W_{X_1+X_2+X_3} = \{3, 4, \ldots, 12\}$

$$\begin{aligned} G_{X_1+X_2+X_3}(t) &= \frac{1}{10} \cdot \sum_{m=3}^{12} t^m = \\ &= G_{X_1}(t) \cdot G_{X_2}(t) \cdot G_{X_3}(t) = \sum_{i=1}^{4} p_i \cdot t^i \cdot \sum_{j=1}^{4} q_j \cdot t^j \cdot \sum_{k=1}^{4} r_k \cdot t^k, \end{aligned}$$

wobei $r_k := \mathrm{P}(X_3 = k)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ analog zu p_i und q_j definiert worden ist. (Die Zufallsvariable X_3 ist entsprechend X_1 und X_2 definiert.) Division durch $t^3 \neq 0$ führt zu

$$\frac{1}{10} \cdot \sum_{m=3}^{12} t^{m-3} = \underbrace{\sum_{i=1}^{4} p_i \cdot t^{i-1}}_{=:\, p(t)} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{4} q_j \cdot t^{j-1}}_{=:\, q(t)} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{4} r_k \cdot t^{k-1}}_{:=\, r(t)},$$

woraus wir $p_4 > 0$, $q_4 > 0$ und $r_4 > 0$ ablesen. Damit hat jedes der drei Polynome p, q und r dritten Grades auf der rechten Seite der Gleichung wenigstens eine reelle Nullstelle, auf der linken Seite dagegen ist wegen $\frac{1}{10} \cdot \sum_{m=3}^{12} t^{m-3} = \frac{1}{10} \cdot \frac{t^{10}-1}{t-1}$ nur eine reelle Nullstelle $t_0 = -1$ zu konstatieren. Daher sind rechts wenigstens drei reelle Nullstellen (mit ihren Vielfachheiten) zu zählen, links dagegen ist t_0 die einzige, und sie ist einfach: Widerspruch zur Annahme.

Eine Verallgemeinerung dieses Unmöglichkeitsresultats auf $n \geq 2$ Tetraeder kann rasch gefunden werden: Für $2 \cdot n$ $(n \in \mathbb{N})$ Tetraeder stoßen wir unter der

Annahme, dass Gleichwahrscheinlichkeit für die geworfene Augensumme möglich ist, auf die Gleichung

$$\frac{1}{6 \cdot n+1} \cdot \frac{{t_0}^{6 \cdot n+1}-1}{t_0-1}=0.$$

Wegen $6 \cdot n+1$ ungerade kommt nur $t_0 = 1$ als reelle Lösung in Frage, ein Widerspruch.

Für $2 \cdot n+1$ ($n \in \mathbb{N}$) Tetraeder ergibt sich unter der gleichen Annahme wie eben

$$\frac{1}{6 \cdot n+4} \cdot \frac{{t_0}^{6 \cdot n+4}-1}{t_0-1}=0.$$

Dies impliziert $t_0 = -1 \in \mathbb{R}$ oder $t_0 = 1 \in \mathbb{R}$, nur $t_0 = -1$ ist hier reelle Lösung. Wegen

$$\frac{1}{6 \cdot n+4} \cdot \frac{t^{6 \cdot n+4}-1}{t-1}=\sum_{i=1}^{4} p_i^{(1)} \cdot t^{i-1} \cdot \ldots \cdot \sum_{k=1}^{4} p_k^{(2 \cdot n+1)} \cdot t^{k-1}$$

und der Einsicht, dass jedes der Polynome $\sum_{l=1}^{4} p_l^{(m)} \cdot t^{l-1}$ $(m = 1, 2, \ldots, 2 \cdot n+1)$ wenigstens eine reelle Nullstelle hat, auf der linken Seite der Gleichung aber nur eine reelle Nullstelle zu finden ist, und die ist einfach, kommen wir abermals zu einem Widerspruch.

Auch die übrigen Platonischen Körper kommen ob ihrer Form als Laplace-Gerät in Betracht: Oktaeder von acht gleichseitigen Dreiecken begrenzt, Dodekaeder von zwölf regelmäßigen Fünfecken begrenzt und schließlich das Ikosaeder mit seinen 20 gleichseitigen Dreiecken als Begrenzungsflächen. Auch in diesen Fällen kann sich Gleichwahrscheinlichkeit für die Ausprägungen der geworfenen Augensumme nicht einstellen: Entscheidend ist, dass alle Platonischen Körper von einer geraden Zahl von Flächen begrenzt sind. Wenn wir nun die Flächen von 1 bis $2 \cdot k$ $(k = 2, 3, 4, 6, 10)$ nummerieren, dann ist die erzeugende Funktion für die geworfene Augenzahl eines Tetraeders, Würfels, … immer ein Polynom geraden Grades in t. Division durch $t \neq 0$ liefert ein Polynom ungeraden Grades. Damit ist die Existenz von reellen Nullstellen gesichert und der Beweis geht wie für Würfel und Tetraeder gezeigt durch.

Zusammenfassend kann man sagen: Nummeriert man die Begrenzungsflächen von $n \geq 2$ Platonischen Körpern mit den Zahlen von 1 bis $2 \cdot k$ $(k = 2, 3, 4, 6, 10)$ und betrachtet man die geworfene Augensumme, so kann sich niemals Gleichwahrscheinlichkeit für sie einstellen (genauer: für ihre möglichen Ausprägungen), egal ob die n Platonischen Körper fair sind oder eine Teilmenge davon in beliebiger Weise verfälscht worden ist.

Das Gleichungssystem für zwei Münzen in Abschnitt 3 und das für die beiden Würfel in Abschnitt 4 zeigt uns weiters, wie der Einsatz der erzeugenden Funktionen bei der Beantwortung der Frage nach möglicher Erzielung von Gleichwahrscheinlichkeit der Ausprägungen der Augensumme durch Verfälschung motiviert werden kann: Das Ergebnis einer Multiplikation von Polynomen entspricht den Summen von (Produkten von) Wahrscheinlichkeiten, die Zeile für Zeile die eben erwähnten (und analoge) Gleichungssysteme ausmachen.

Die in gewisser Weise umgekehrte Fragestellung ist leicht zu beantworten: Können die fairen Würfel (Tetraeder, ...) so beschriftet werden, dass sich Gleichwahrscheinlichkeit für die (Ausprägungen der) Augensumme einstellt? – Ja, und zwar auf folgende Weise: Trägt der eine Würfel die Zahlen $\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$ und ein zweiter die Zahlen $\{64, 128, 256, 512, 1024, 2048\}$, dann sind die Ausprägungen für die geworfene Augensumme der beiden fairen Würfel gleichwahrscheinlich: Jedes der 36 gleichwahrscheinlichen Zahlenpaare $(2^i, 2^j)$ ($i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ und $j \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$) ergibt nämlich eine Summe, die durch kein anderes Zahlenpaar erreicht werden kann: Angenommen $2^i + 2^j = 2^k + 2^l$ mit $i \neq k$ und $j \neq l$, $i, k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ und $j, l \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Dann ist $1 + 2^{j-i} = 2^{k-i} + 2^{l-i}$ mit $j - i$, $k - i$ und $l - i$ positiv (es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $i < k$). Links steht dann eine ungerade Zahl, rechts eine gerade: Widerspruch.

Sind die beiden Würfel z. B. nur mit Einsern beschriftet, so ergibt sich klarerweise Gleichwahrscheinlichkeit für die einzige Ausprägung der Augensumme, nämlich Wahrscheinlichkeit eins für das Ereignis „Augensumme ist gleich zwei".

Fordert man die gleiche Beschriftung der beiden Würfel, wobei wenigstens zwei unterschiedliche Zahlen darunter sein müssen, dann steht die Fairness der beiden Würfel der Forderung nach Gleichwahrscheinlichkeit der Ausprägungen der geworfenen Augensumme entgegen: Das Minimum der möglichen Summen zu würfeln sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit zwei, das heißt das Minimum der Augenzahlen eines Würfels ist eins. Für eine ungerade Anzahl von Einsern pro Würfel kann sich aus folgendem Grund keine Gleichwahrscheinlichkeit der Ausprägungen der Augensumme einstellen: Die Augensumme zwei kann dann auf eine ungerade Anzahl von Möglichkeiten erzielt werden ($1 = 1 \cdot 1$, $9 = 3 \cdot 3$ oder $25 = 5 \cdot 5$), die Ausprägung, die sich aus eins und dem nach eins nächst größeren Summanden a zusammensetzt, wird durch eine gerade Anzahl von Möglichkeiten realisiert. Daher ist $\mathrm{P}(X_1 + X_2 = 2) \neq \mathrm{P}(X_1 + X_2 = 1 + a)$.

Für eine gerade Anzahl von Einsern kann Folgendes geschlossen werden: Wenn jeweils vier Einser auf den beiden Würfeln zu finden sind, dann gelte für die beiden übrigen Beschriftungen a und b der Würfel, dass $1 < a, b$ ist. Es ist jedenfalls $\mathrm{P}(X_1 + X_2 = 2) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.

Wenn $a \neq b$ gilt, sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a < b$. Dann ist $\mathrm{P}(X_1 + X_2 = 2 \cdot a) = \frac{1}{36}$ oder $\mathrm{P}(X_1 + X_2 = 2 \cdot a) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$, wenn nämlich $b + 1 = 2 \cdot a$ gilt. In beiden Fällen ist $\mathrm{P}(X_1 + X_2 = 2 \cdot a) \neq \mathrm{P}(X_1 + X_2 = 2)$.

Wenn $a = b$ ist, dann müssen wir $\mathrm{P}(X_1 + X_2 = 2 \cdot a) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \neq \mathrm{P}(X_1 + X_2 = 2)$ zur Kenntnis nehmen.

Befinden sich jeweils zwei Einser auf den beiden Würfeln, dann ist jedenfalls $\mathrm{P}(X_1 + X_2 = 2) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. Für die übrigen vier Beschriftungen a, b, c und d der Würfel gelte $1 < a \leq b \leq c \leq d$.

Ist $a < b$, dann kann die Augensumme $2 \cdot a$ nur auf eine ungerade Anzahl von Möglichkeiten zustande kommen: Für die „verdächtigen" Ausprägungen $b + 1$, $c + 1$ bzw. $d + 1$, die eventuell gleich $2 \cdot a$ sein könnten, stellen wir in diesen Fällen jeweils vier Realisationsmöglichkeiten fest. Insgesamt ist also jedenfalls $\mathrm{P}(X_1 + X_2 = 2) \neq \mathrm{P}(X_1 + X_2 = 2 \cdot a)$ festzuhalten.

Für $d > c$ ist $\mathrm{P}(X_1 + X_2 = 2) \neq \mathrm{P}(X_1 + X_2 = 2 \cdot d) = \frac{1}{36}$.

Der Fall $a = b < c = d$ liefert zwar einerseits $\mathrm{P}(X_1 + X_2 = 2) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = \mathrm{P}(X_1 + X_2 = 2 \cdot c)$ und weiters $\mathrm{P}(X_1 + X_2 = 2 \cdot a) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, wenn $2 \cdot a \neq 1 + c$, sonst ist $\mathrm{P}(X_1 + X_2 = 2 \cdot a) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$, andererseits aber ist $\mathrm{P}(X_1 + X_2 = 1 + a) = \mathrm{P}(X_1 + X_2 = 1 + c) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$ $(2 \cdot a \neq 1 + c)$ oder $\mathrm{P}(X_1 + X_2 = 1 + c) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ $(2 \cdot a = 1 + c)$ nach soeben.

Schließlich müssen wir noch den Fall $a = b = c = d$ untersuchen: Dann ist $\mathrm{P}(X_1 + X_2 = 2 \cdot a) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$, ebenso ist $\mathrm{P}(X_1 + X_2 = 1 + a) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$, also sind diese Wahrscheinlichkeiten jeweils viermal so groß wie die für das Eintreten der minimalen Augensumme zwei.

Die immer wieder getroffenen Fallunterscheidungen sind eine spezifische mathematische Herangehensweise, ebenso, dass Verallgemeinerungen durch konkrete spezielle Einzelfälle vorbereitet werden: $n = 2$ für gerade Anzahlen, $n = 3$ für ungerade, Würfel für alle Platonischen Körper.

Die in Rede stehenden Summen sind alle endlich. Daher sind keine Konvergenzüberlegungen anzustellen, was nicht unwesentlich zum elementaren Charakter dieses Problems beiträgt.

Ein Wort noch zur Formulierung der indirekten Beweise, wie sie auch hier verwendet wird. Unmöglichkeitsbeweise sind an und für sich typischerweise nur in der Mathematik zu finden und dementsprechend ungewohnt für nicht in dieser Wissenschaft Trainierte. Zu zeigen, dass es etwas nicht gibt, dazu nimmt man an, es gibt es doch, und führt dann einen Widerspruch herbei, hier ist neben dem

Verständnis der Semantik auch das Beherrschen der Sprache der Mathematik (ihr charakteristischer „Slang") gefordert. Das Studium z. B. von Kapitel 1 („Die Sprache der Mathematik") in [3] kann dafür eine wertvolle Vorbereitung sein.

Dieses Resümee soll zeigen, dass für die Mathematik typische Arbeitsweisen schon an elementaren Problemen demonstriert werden können, an so genannten mathematischen Miniaturen. Fließen solche Miniaturen in die Lehramtsausbildung mit ein, so können sie helfen, das Bild von Mathematik in den Studierenden zu authentisieren. Dabei müssen die Probleme bzw. Aufgabenstellungen so gestaltet sein, dass vorgegebene Ideen auch zum „Erfolg" führen – eventuell unter leichter Abänderung der ursprünglichen Strategie. Noch einmal: Charakteristisch für diese mathematischen Miniaturen ist die Betonung einer modellhaften Abbildung mathematischen Tuns, nicht das Problem an sich. Insofern versteht sich dieser Beitrag auch als ein Versuch, ein (neuer) Ansatz, die in den letzten Jahren doch etwas an Bedeutung verlierende Stoffdidaktik einer Renaissance zuzuführen.

Diese Miniaturen können auch den autonomen Charakter der Mathematik betonen, wie er im Lehrplan Mathematik für die AHS Oberstufe in Österreich beschrieben wird: „*Autonomer Aspekt:* Mathematische Gegenstände und Sachverhalte bilden als geistige Schöpfungen eine deduktiv geordnete Welt eigener Art, in der Aussagen – von festgelegten Prämissen ausgehend – stringent abgeleitet werden können. Mathematik befähigt damit, dem eigenen Denken mehr zu vertrauen als fremden Meinungsmachern und fördert so den demokratischen Prozess."

Neben den Anwendungen der Mathematik und ihrer Sichtweise als Kulturfach, die das Vorhandensein des Faches „Mathematik" im Fächerkanon des Gymnasiums begründen, ist es dieser Aspekt, der ebenfalls einen wichtigen Beitrag der Mathematik zur Allgemeinbildung darstellt: Die Charakteristika mathematischen Tuns sind auch in anderen Lebensbereichen nicht unwichtig. Das Verallgemeinern, das Treffen von Fallunterscheidungen, das Betrachten von Extremfällen, das Formulieren von Voraussetzungen, das Verwenden bekannter Methoden in neuen Anwendungen sind nur einige Beispiele dafür.

Literatur

[1] K. Bosch, *Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung*, vieweg studium Basiswissen, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1986 (5., durchgesehene Auflage).

[2] H. Dehling und B. Haupt, *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*, Springer, Berlin u. a., 2003.

[3] S. Götz und H.-C. Reichel (Hrsg.), *Mathematik Lehrbuch 5* von Robert Müller und Günter Hanisch, öbv&hpt, Wien, 2004.

[4] S. Götz und H.-C. Reichel (Hrsg.), *Mathematik Lehrbuch 6* von Robert Müller und Günter Hanisch, öbv&hpt, Wien, 2005.

[5] P. Halmos, *Problems for Mathematicians, Young and Old*, The Dolciani Mathematical Expositions (Number Twelve), published by The Mathematical Association of America, 1991.

[6] U. Krengel, *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*, vieweg studium Aufbaukurs Mathematik, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1991 (dritte, erweiterte Auflage).

[7] H. Kütting, *Elementare Stochastik*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg · Berlin, 1999.

[8] D. Plachky, *Mathematische Grundbegriffe und Grundsätze der Stochastik*, Springer, Berlin u. a., 2001.

STEFAN GÖTZ
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT WIEN
NORDBERGSTRASSE 15
A–1090 WIEN
UND
AKADEMISCHES GYMNASIUM WIEN I.
BEETHOVENPLATZ 1
A–1010 WIEN
ÖSTERREICH

E-mail: Stefan.Goetz@univie.ac.at

(Received July, 2005)