2/1 (2004), 49–65
tmcs@math.klte.hu
http://tmcs.math.klte.hu
Teaching Mathematics and Computer Science

Ein ungewöhnlicher Weg zu Jakob Steiners Umellipse eines Dreiecks und zur Steiner–Hypozykloide

Oswald Giering

Herrn Professor József Szabó zum 65. Geburtstag gewidmet

Abstract. In real projective geometry of triangles two problems of collinear points are discussed. The problems differ only from the running through the vertices of a given triangle ABC. Resolving the problems we find two cubic curves k_S and k_T. Affine specialization leads to the circumscribed Steiner ellipse about the triangle ABC and shows us this ellipse in more general surroundings. Euclidean specialization leads to Steiners three-cusped hypocycloid.

Key words and phrases: projective geometry of triangles, plane cubics, circumscribed Steiner ellipse about a triangle, Steiners hypocycloid.

ZDM Subject Classification: G79, G75, G45.

In der Dreiecksgeometrie treten zahlreiche Kubiken (Kurven 3. Ordnung) auf, die sich einem gegebenen Dreieck ABC als Ortskurven zuordnen lassen. Beispiele und Literaturhinweise zu diesem Themenkreis finden sich in [1, 2, 3] und [6].

Im Folgenden werden zwei Kubiken k_S und k_T vorgestellt, die sich beim Studium von zwei projektivinvarianten Kollinearitätsproblemen einstellen. Beide Kubiken können in einen Kegelschnitt k und eine Gerade zerfallen. Dabei ergeben sich Querverbindungen zum Satz von Pascal über die einem Kegelschnitt einbeschriebenen Sechsecke. Auch wird das von k_S und k_T aufgespannte Kubikenbüschel betrachtet. Nach affiner Spezialisierung bieten die Kubiken k_S und

k_T die Möglichkeit, die einem Dreieck umbeschriebene Steiner–Ellipse[1] in einem allgemeineren Zusammenhang zu sehen. Speziell am gleichseitigen Dreieck wird ein Hüllkurvenproblem behandelt, das zur Steiner–Hypozykloide[1] führt.

1. Ein Kollinearitätsproblem

In der reellen projektiven Ebene sei ein festes Dreieck ABC gegeben sowie auf jeder seiner Seiten AB, BC, CA ein von A, B, C verschiedener Punkt: $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$ (Abbildung 1). Die Punkte A', B', C' werden als *Leitpunkte* bezeichnet.

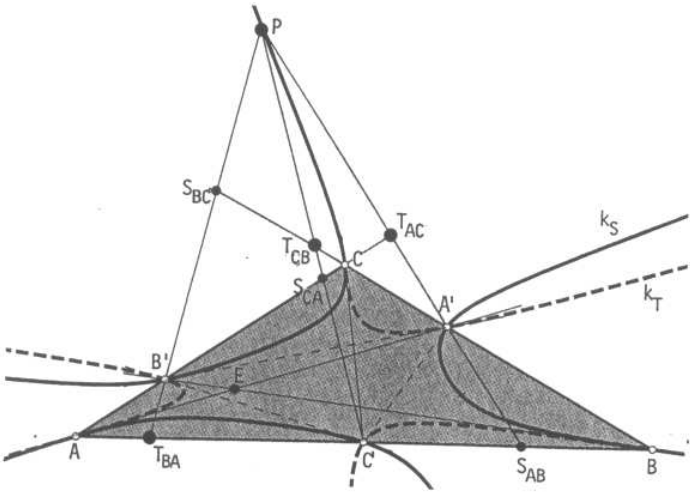

Abbildung 1

Wir betrachten nun die Verbindungsgeraden PA', PB', PC' eines beliebigen Punktes P der Dreiecksebene mit den Leitpunkten A', B', C' sowie die (zweimal drei) Schnittpunkte:

$$S_{AB} := PA' \cap AB, \qquad S_{BC} := PB' \cap BC, \qquad S_{CA} := PC' \cap CA,$$
$$T_{AC} := PA' \cap AC, \qquad T_{CB} := PC' \cap CB, \qquad T_{BA} := PB' \cap BA.$$

[1]Jakob Steiner (1796–1833), siehe etwa [5], S.637.

Dem Punktetripel (S_{AB}, S_{BC}, S_{CA}) liegt die Durchlaufung $A \to B \to C \to A$ des Dreiecks ABC zugrunde, während das Punktetripel (T_{AC}, T_{CB}, T_{BA}) der Durchlaufung $A \to C \to B \to A$ zugeordnet ist.

Wir fragen: Für welche Punkte P liegen die drei Punkte S_{AB}, S_{BC}, S_{CA} bzw. T_{AC}, T_{CB}, T_{BA} *kollinear*?

2. Das Kollinearitätsproblem in projektiver Sicht

2.1. Zur Bearbeitung des in Abschnitt 1 formulierten Problems seien die Ecken des Dreiecks ABC als Grundpunkte eines projektiven $x_0x_1x_2$-Koordinatensystems gewählt: $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$. Die Dreiecksebene werde bei Bedarf komplex erweitert. Die Koordinaten der Leitpunkte A', B', C' seien:

$$A'(0,\alpha_1,\alpha_2), B'(\beta_0,0,\beta_2),\ C'(\gamma_0,\gamma_1,0) \quad \text{mit } \alpha_1\alpha_2\beta_0\beta_2\gamma_0\gamma_1 \neq 0.$$

Der laufende Punkt P erhalte die Koordinaten (ξ_0,ξ_1,ξ_2). Dann besitzen die (viermal drei) Geraden AB, BC, CA; $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$; PA', PB', PC'; AA', BB', CC' die Gleichungen:

$$AB \ldots x_2 = 0, \quad BC \ldots x_0 = 0, \quad CA \ldots x_1 = 0 \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &A'B' \ldots \alpha_1\beta_2x_0 + \alpha_2\beta_0x_1 - \alpha_1\beta_0x_2 = 0\\ &B'C' \ldots \beta_2\gamma_0x_1 + \beta_0\gamma_1x_2 - \beta_2\gamma_1x_0 = 0\\ &C'A' \ldots \gamma_0\alpha_1x_2 + \gamma_1\alpha_2x_0 - \gamma_0\alpha_2x_1 = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &PA' \ldots \xi_0(\alpha_2x_1 - \alpha_1x_2) + (\alpha_1\xi_2 - \alpha_2\xi_1)x_0 = 0\\ &PB' \ldots \xi_1(\beta_0x_2 - \beta_2x_0) + (\beta_2\xi_0 - \beta_0\xi_2)x_1 = 0\\ &PC' \ldots \xi_2(\gamma_1x_0 - \gamma_0x_1) + (\gamma_0\xi_1 - \gamma_1\xi_0)x_2 = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &AA' \ldots \alpha_2x_1 - \alpha_1x_2 = 0\\ &BB' \ldots \beta_0x_2 - \beta_2x_0 = 0\\ &CC' \ldots \gamma_1x_0 - \gamma_0x_1 = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Aus (1) und (3) berechnet man als Koordinaten der Punkte $S_{AB}, S_{BC}, \ldots, T_{CB}$:

$$\begin{aligned} &S_{AB}(\xi_0\alpha_2, \xi_1\alpha_2 - \xi_2\alpha_1, 0), \quad T_{AC}(\xi_0\alpha_1, 0, \xi_2\alpha_1 - \xi_1\alpha_2),\\ &S_{BC}(0, \xi_1\beta_0, \xi_2\beta_0 - \xi_0\beta_2), \quad T_{CB}(0, \xi_1\gamma_0 - \xi_0\gamma_1, \xi_2\gamma_0),\\ &S_{CA}(\xi_0\gamma_1 - \xi_1\gamma_0, 0, \xi_2\gamma_1), \quad T_{BA}(\xi_0\beta_2 - \xi_2\beta_0, \xi_1\beta_2, 0). \end{aligned} \tag{5}$$

Die Punkte S_{AB}, S_{BC}, S_{CA} liegen genau dann kollinear, wenn gilt:

$$\begin{vmatrix} \xi_0\alpha_2 & \xi_1\alpha_2 - \xi_2\alpha_1 & 0 \\ 0 & \xi_1\beta_0 & \xi_2\beta_0 - \xi_0\beta_2 \\ \xi_0\gamma_1 - \xi_1\gamma_0 & 0 & \xi_2\gamma_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_2\beta_0\gamma_1\xi_0\xi_1\xi_2 + (\xi_1\alpha_2 - \xi_2\alpha_1)(\xi_2\beta_0 - \xi_0\beta_2)(\xi_0\gamma_1 - \xi_1\gamma_0) = 0. \quad (6)$$

Entsprechend liegen die Punkte T_{AC}, T_{CB}, T_{BA} genau dann kollinear, wenn gilt:

$$\begin{vmatrix} \xi_0\alpha_1 & 0 & \xi_2\alpha_1 - \xi_1\alpha_2 \\ 0 & \xi_1\gamma_0 - \xi_0\gamma_1 & \xi_2\gamma_0 \\ \xi_0\beta_2 - \xi_2\beta_0 & \xi_1\beta_0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_1\beta_2\gamma_0\xi_0\xi_1\xi_2 + (\xi_2\alpha_1 - \xi_1\alpha_2)(\xi_0\beta_2 - \xi_2\beta_0)(\xi_1\gamma_0 - \xi_0\gamma_1) = 0. \quad (7)$$

Wählt man (ohne Einschränkung) den Geradenschnittpunkt $AA' \cap BB'$ als Einheitspunkt $E(1,1,1)$ des projektiven Koordinatensystems, so folgt $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_0 = \beta_2 = 1$. Sind die Geraden AA', BB', CC' *kopunktal* in E, so folgt zusätzlich $\gamma_0 = \gamma_1 = 1$.

Aus den Gleichungen (6) und (7) entnimmt man unter Beachtung der bisherigen Entwicklungen:

Satz 1. *Die Punkte S_{AB}, S_{BC}, S_{CA} bzw. die Punkte T_{AC}, T_{CB}, T_{BA} sind genau dann kollinear, wenn der laufende Punkt P auf der Kubik k_S mit Gleichung (6) bzw. auf der Kubik k_T mit Gleichung (7) liegt (Abbildung 1).*

Die Kubiken k_S und k_T gehen durch die Ecken der Dreiecks ABC sowie durch die Leitpunkte A', B', C'. Man kennt somit 6 gemeinsame Punkte der Kubiken k_S und k_T (ihre Schnittpunkte mit den Dreieckseiten).

Die Geraden AA', BB', CC' schneiden die Kubiken k_S und k_T in A, B, C jeweils zweifach und in A', B', C' jeweils einfach. Daher sind A, B, C (zweifach zählend) und A', B', C' (einfach zählend) die – nach dem Satz von Bézout – 9 gemeinsamen Punkte der Kubiken k_S und k_T.[2]

[2]Man zeigt leicht, dass A, B, C reguläre Punkte beider Kubiken sind. Folglich sind die Geraden AA', BB', CC' gemeinsame Tagenten der Kubiken. Eine Kubik ist durch 9 unabhähgige Punkte bestimmt (siehe etwa [4], S.201). Die 9 gemeinsamen Punkte A, B, C (zweifach zählend) und A', B', C' sind wegen der Kollinearität der Punkte S_{AB}, S_{BC}, S_{CA} bzw. T_{AC}, T_{CB}, T_{BA} jedoch nicht unabhängig!

Für $\alpha_2\beta_0\gamma_1 + \alpha_1\beta_2\gamma_0 \neq 0$ sind die Leitpunkte A', B', C' nicht kollinear (Abbildung 1). Dann gilt: In A', B', C' besitzt die Kubik k_S jeweils die Tangente $A'C'$, $B'A'$, $C'B'$ und die Kubik k_T jeweils die Tangente $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$.[3]

Für $\alpha_2\beta_0\gamma_1 + \alpha_1\beta_2\gamma_0 = 0$ sind die Leitpunkte A', B', C' kollinear (Abbildung 2). Dann stimmen die Kubiken k_S und k_T überein und zerfallen in die Leitpunktgerade $A'B'C'$ mit der Gleichung

$$\alpha_1\beta_2x_0 + \alpha_2\beta_0x_1 - \alpha_1\beta_0x_2 = 0 \tag{8}$$

und den Kegelschnitt k mit der Gleichung

$$\beta_2\gamma_0x_0x_1 - \beta_0\gamma_0x_1x_2 + \beta_0\gamma_1x_2x_0 = 0. \tag{9}$$

Die den Kubiken k_S und k_T zugeordneten Punktetripel (S_{AB}, S_{BC}, S_{CA}) und (T_{AC}, T_{CB}, T_{BA}) sind dann kollinear.

Zerfallen die Kubiken k_S und k_T in die Leitpunktgerade $A'B'C'$ und den Kegelschnitt k und läuft der Punkt P auf der Leitpunktgeraden $A'B'C'$, dann sind die Punkte S_{AB}, S_{BC}, S_{CA} sowie die Punkte T_{AC}, T_{CB}, T_{BA} trivialerweise kollinear. Abbildung 2 zeigt P als laufenden Punkt des Kegelschnitts k und die drei jeweils kollinearen Punktetripel (A', B', C'), (S_{AB}, S_{BC}, S_{CA}), (T_{AC}, T_{CB}, T_{BA}).

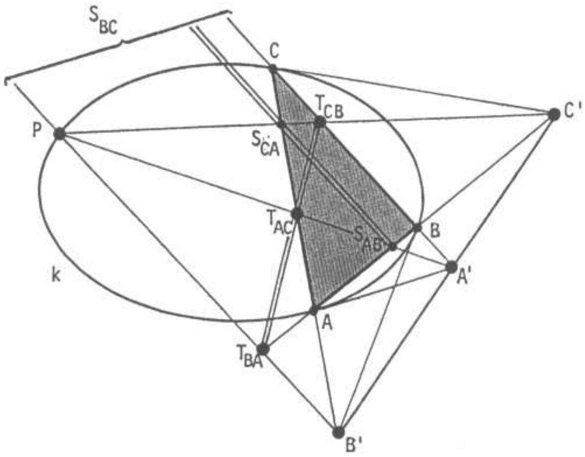

Abbildung 2

[3]Damit kennt man in algebraischer Zählung von jeder Kubiken k_S und k_T 12 Punkte.

Der Kegelschnitt k besitzt die Eigenschaften:

(1) k geht durch die Ecken des Dreiecks ABC.

(2) k besitzt in A die Tangente AA', in B die Tangente BB' und in C die Tangente CC'. Damit ist das Dreieck ABC dem Kegelschnitt k derart einbeschrieben, dass die Schnittpunkte A', B', C' der Tangenten von k in A, B, C mit den jeweiligen Gegenseiten BC, CA, AB *kollinear* liegen. Es zeigt sich also der folgende *Spezialfall des Satzes von Pascal* über ein dem Kegelschnitt k einbeschriebenes Sechseck: Das Sechseck ist entartet in das Dreieck ABC und die Kegelschnittangenten in A, B, C. Die Gegenseite von AB, BC, CA ist jeweils die Tangente von k in C, A, B.

(3) k schneidet die Leitpunktgerade $A'B'C'$ stets konjugiert komplex.

(4) Die Leitpunktgerade $A'B'C'$ besitzt bezüglich k den Pol$(2\alpha_2\beta_0, 2\alpha_1\beta_2, -\alpha_2\beta_2)$.

Bemerkung. Der Kegelschnitt k, der in den Punkten A, B, C die Tangenten AA', BB', CC' besitzt, ist durch die 6 Elemente A, B, C, AA', BB', CC' überbestimmt. Man kann daher die folgende *Schließungsaussage* formulieren: Sind $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$ drei (von A, B, C verschiedene) kollineare Punkte und ist k der Umkegelschintt des Dreiecks ABC, der in A die Tangente AA' und in B die Tangente BB' besitzt, dann besitzt k in C die Tangente CC'.

2.2. Fällt (entgegen unserer Voraussetzung) *einer* der Leitpunkte A', B', C' in eine Ecke des Dreiecks ABC, so zerfallen die Kubiken k_S und k_T ebenfalls (siehe (6) und (7)).

Für $A' = C$ $(\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1)$ sowie für $B' = A$ $(\beta_2 = 0,\ \beta_0 = 1)$ und $C' = B$ $(\gamma_0 = 0,\ \gamma_1 = 1)$ zerfällt k_S in eine Dreieckseite (AC, BA, bzw. CB) und einen Kegelschnitt k^*; die Kubik k_T zerfällt in drei Geraden (für $A' = C$ in AC, CC', BB', für $B' = A$ in BA, AA', CC' und für $C' = B$ in CB, BB', AA'). Abbildung 3 zeigt den Fall $B' = A$. Für $B' = A$ geht der Kegelschnitt k^* durch die Punkte A, A', C und besitzt in A' die Tangente $A'C'$, in C die Tangente CC'; k^* ist dadurch bestimmt.

Für $A' = B$ $(\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0)$ sowie für $B' = C$ $(\beta_0 = 0,\ \beta_2 = 1)$ und $C' = A$ $(\gamma_0 = 1, \gamma_1 = 0)$ zerfällt die Kubik k_S in drei Geraden (für $A' = B$ in AB, BB', CC', für $B' = C$ in BC, CC', AA' und für $C' = A$ in CA, AA', BB'); die Kubik k_T zerfällt jeweils in eine Dreieckseite und einen Kegelschnitt.

Das Studium weiterer Zerfallsmöglichkeiten, die sich einstellen, wenn Leitpunkte mit Dreiecksecken inzidieren, überlassen wir dem Leser.

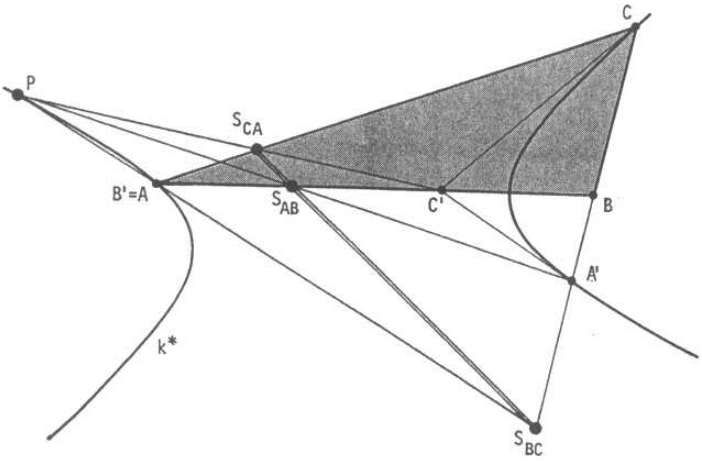

Abbildung 3

2.3. Das von den Kubiken k_S und k_T aufgespannte *Kubikenbüschel* wird unter Verwendung der projektiven Büschelparameter λ, μ beschrieben durch die Gleichung:

$$(\lambda\alpha_2\beta_0\gamma_1 + \mu\alpha_1\beta_2\gamma_0)\xi_0\xi_1\xi_2 + \\ + (\lambda - \mu)(\xi_1\alpha_2 - \xi_2\alpha_1)(\xi_2\beta_0 - \xi_0\beta_2)(\xi_0\gamma_1 - \xi_1\gamma_0) = 0. \quad (10)$$

Aus (10) folgt unmittelbar:

Satz 2. *Die Büschelkubik* (10) *zerfällt*
für $\lambda - \mu \neq 0$ *und* $\lambda\alpha_2\beta_0\gamma_1 + \mu\alpha_1\beta_2\gamma_0 = 0$ *in die Geraden* AA', BB', CC' *und*
für $\lambda - \mu = 0$ *und* $\alpha_2\beta_0\gamma_1 + \alpha_1\beta_2\gamma_0 \neq 0$ *in die Dreieckseiten* AB, BC, CA.
Für $\alpha_2\beta_0\gamma_1 + \alpha_1\beta_2\gamma_0 = 0$ *stimmen die Kubiken* k_S *und* k_T *nach Satz 1 überein und zerfallen in die Leitpunktgerade* $A'B'C'$ *und den Kegelschnitt* k.

Bemerkung. Die Geraden $\xi_1 = \lambda\xi_0$ des Geradenbüschels mit Zentrum C schneiden die Kubik k_S in C und in zwei weiteren Punkten, deren Koordinaten durch $\xi_1 = \lambda\xi_0$ und eine quadratische Gleichung für $\xi_2 : \xi_0$ bestimmt sind, die sich einstellt, wenn man $\xi_1 = \lambda\xi_0$ in (6) einsetzt. Ist $F(\lambda)$ die Lösung dieser Gleichung, dann stellt $\xi_1 = \lambda\xi_0$, $\xi_2 = F(\lambda)\xi_0$ eine Parameterdarstellung von k_S mit Parameter λ dar. Entsprechendes gilt für k_T.

3. Das Kollinearitätsproblem in affiner und euklidischer Sicht

3.1. Wird in der projektiven Ebene des Dreiecks ABC eine Gerade als Ferngerade ausgezeichnet, dann besitzen die Kubiken k_S, k_T eine oder drei Asymptoten, je nachdem die Ferngerade die Kubik in einem oder in drei verschiedenen reellen Punkten schneidet. Ist die Ferngerade Ferntangente oder Fernwendetangente der Kubik, dann fallen zwei bzw. drei reelle Schnittpunkte zusammen.

Ein interessanter affiner Sonderfall stellt sich ein, wenn alle drei Leitpunkte A', B', C' Fernpunkte sind. Dann gilt: $AB \| CC'$, $BC \| AA'$, $CA \| BB'$. In diesem Fall stimmen die Kubiken k_S und k_T nach Satz 1 überein und zerfallen in die Leitpunktgerade $A'B'C'$ und einen Kegelschnitt k. Der Kegelschnitt k ist in dieser Interpretation notwendig eine Ellipse, da die Leitpunktgerade $A'B'C'$ nach Abschnitt 2 den Kegelschnitt k stets konjugiert komplex schneidet. Daraus folgt (Abbildung 4):

Satz 3. *Sind in Satz 1 die Leitpunkte A', B', C' eines Dreiecks ABC kollinear und wird die Leitpunktgerade $A'B'C'$ als Ferngerade interpretiert, dann ist der Kegelschnitt k die dem Dreieck ABC umbeschriebene Steiner–Ellipse (jene dem Dreieck ABC umbeschriebene Ellipse, deren Tangenten in den Ecken zu den Gegenseiten parallel sind).*

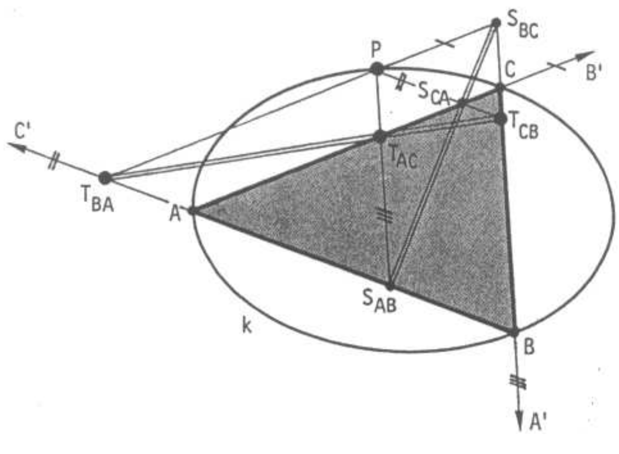

Abbildung 4

Ist nur einer oder sind nur zwei der Leitpunkte A', B', C' Fernpunkte, dann läßt sich Abbildung 2 ebenfalls in leicht durchschaubarer Weise affingeometrisch interpretieren.

3.2. Die folgenden Abbildungen 5 bis 8 zeigen die Kubiken k_S und k_T in einem kartesischen xy-Koordinatensystem, in dem die Ecken des Dreiecks ABC die Koordinaten besitzen: $A(a,0)$, $B(b,0)$, $C(0,c)$. Der laufende Punkt P erhalte nun die Koordinaten (ξ,η). Die Koordinaten der Leitpunkte A', B', C' seien

$$A'([1-\alpha]b,\alpha c),\ B'([1-\beta]a,\beta c),\ C'([1-\gamma]a+\gamma b,0) \quad \text{mit } \alpha\beta\gamma\neq 0,\ \alpha\neq 1,\ \beta\neq 1,\ \gamma\neq 1. \tag{11}$$

Als Kollinearitätsbedingung für die Punkte S_{AB}, S_{BC}, S_{CA} und damit als Gleichung der Kubik k_S erhält man nach einfacher Umformung:

$$\begin{vmatrix} [1-\alpha]b\eta-\alpha c\xi & 0 & \eta-\alpha c \\ [1-\beta]b(c\xi+a\eta-ac) & \beta c\xi-([1-\beta]a-b)\eta-\beta bc & c\xi+b\eta-c([1-\beta]a+\beta b) \\ a\{c\xi+([1-\gamma]a+\gamma b)(\eta-c)\} & \gamma(a-b)\eta & c\xi+a\eta-c([1-\gamma]a+\gamma b) \end{vmatrix}=0. \tag{12}$$

Also Kollinearitätsbedingung für die Punkte T_{AC}, T_{CB}, T_{BA} und damit als Gleichung der Kubik k_T folgt entsprechend:

$$\begin{vmatrix} [1-\beta]a\eta-\beta c\xi & 0 & \eta-\beta c \\ [1-\alpha]a(c\xi+b\eta-bc) & \alpha c\xi-([1-\alpha]b-a)\eta-\alpha ac & c\xi+a\eta-c([1-\alpha]b+\alpha a) \\ b\{c\xi+([1-\gamma]a+\gamma b)(\eta-c)\} & [1-\gamma](b-a)\eta & c\xi+b\eta-c([1-\gamma]a+\gamma b) \end{vmatrix}=0. \tag{13}$$

Abbildung 5 zeigt die Kubiken k_S und k_T zum Dreieck ABC ($a=3$, $b=9$, $c=6$) mit den nicht kollinearen Leitpunkten A', B', C' $\left(\alpha=\frac{1}{2},\ \beta=\frac{1}{3},\ \gamma=\frac{2}{3}\right)$ und den nicht kopunktalen Geraden AA', BB', CC'.

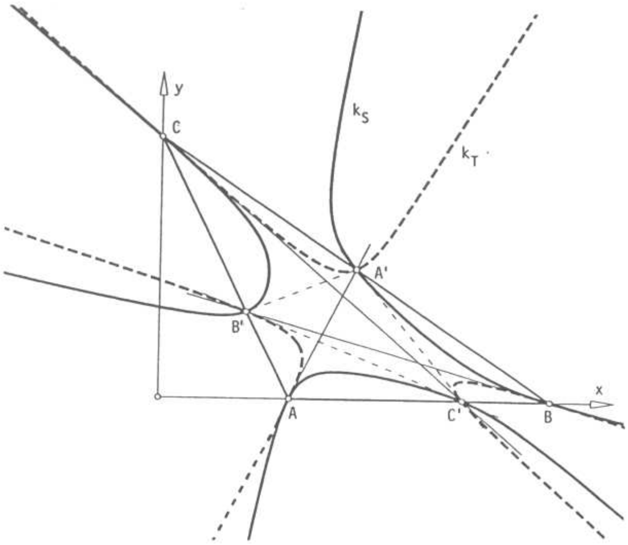

Abbildung 5

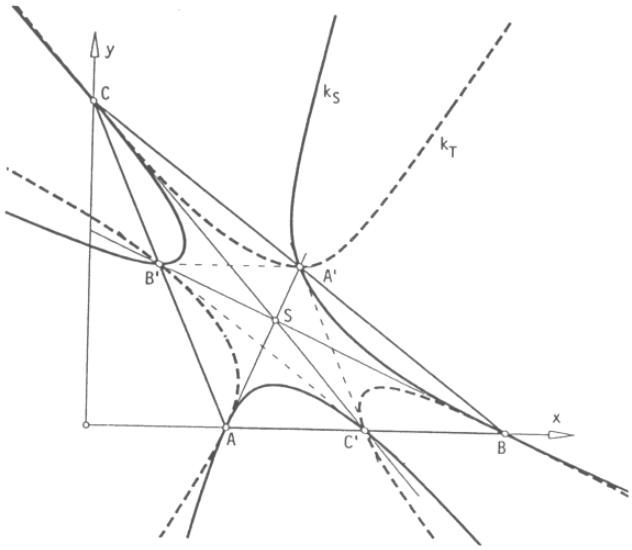

Abbildung 6

Abbildung 6 zeigt die Kubiken k_S und k_T zum Dreieck ABC ($a = 3$, $b = 9$, $c = 7$) mit den Seitenmitten als Leitpunkten A', B', C' (affingeometrisches Beispiel). Die Geraden AA', BB', CC' sind die – im Schwerpunkt S kopunktalen – Schwerlinien des Dreiecks ABC.

Abbildung 7 zeigt die Kubiken k_S und k_T zum Dreieck ABC ($a = 3$, $b = 9$, $c = 6$) mit den Höhenfußpunkten als Leitpunkten A', B', C' (euklidischgeometrisches Beispiel). Die Geraden AA', BB', CC' sind die – im Höhenschnittpunkt H kopunktalen – Höhen des Dreiecks ABC.

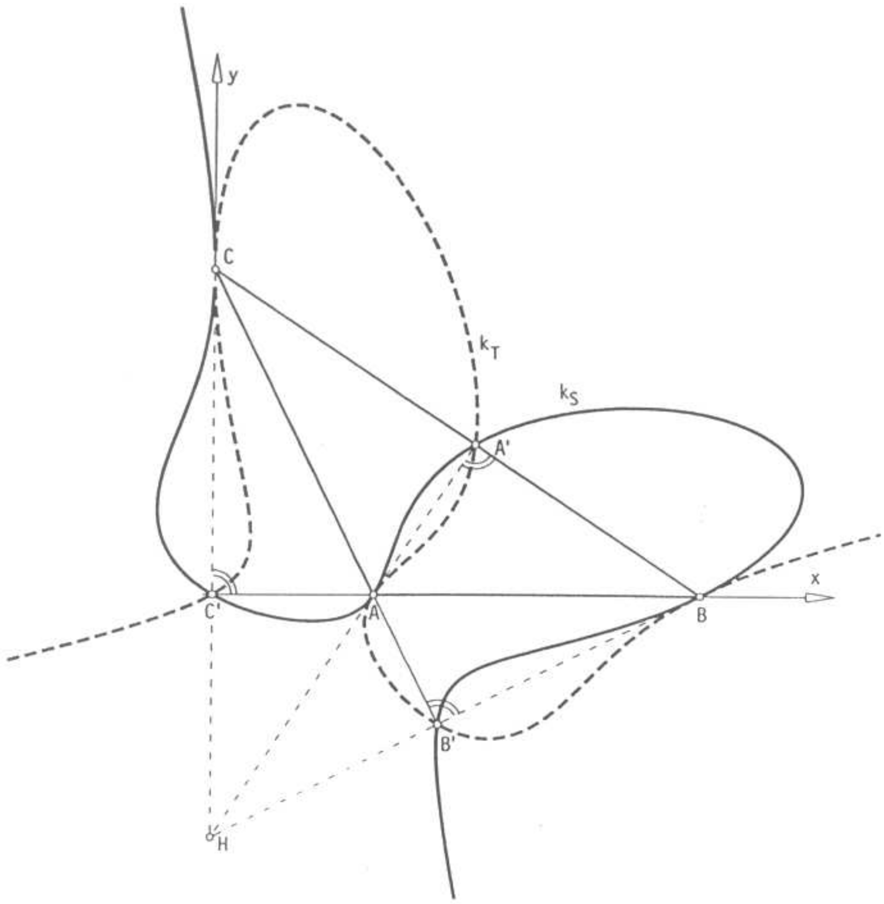

Abbildung 7

Abbildung 8 zeigt die Kubiken k_S und k_T für ein gleichseitiges Dreieck ABC mit den Höhenfußpunkten als Leitpunkten.

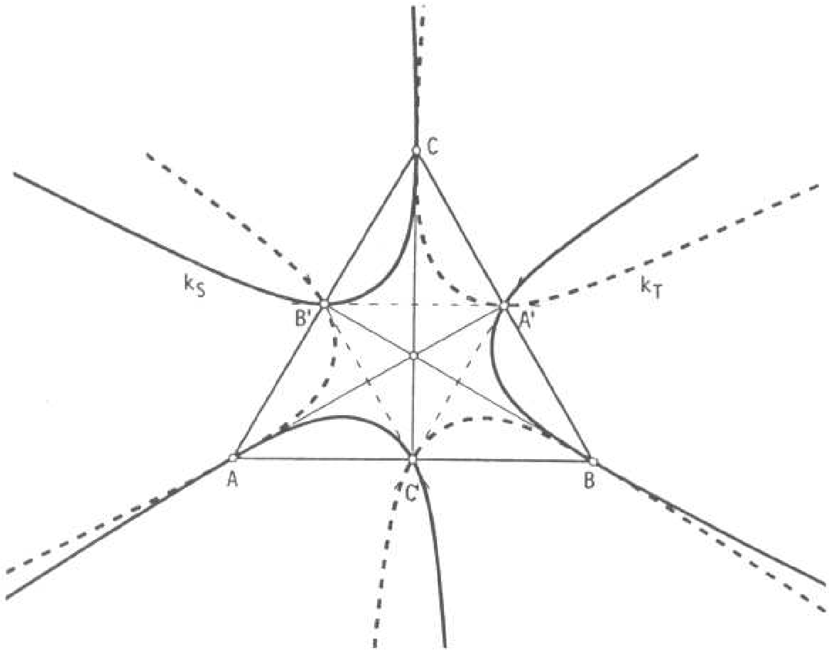

Abbildung 8

4. Ausblick auf differentialgeometrische Fragen

Durchläuft ein Punkt P eine der Kubiken k_S, k_T oder bei deren Zerfall einen der Kegelschnitte k oder k^*, dann durchläuft jede der Geraden $S_{AB}S_{BC}S_{CA}$, $T_{AC}T_{CB}T_{BA}$ eine Geradenschar, die jeweils zur Bestimmung ihrer Hüllkurve einlädt. Wir bestimmen diese Hüllkurven in dem besonders einfachen Fall eines *gleichseitigen Dreiecks* ABC, in dem die Fernpunkte der Dreieckseiten als Leitpunkte $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$ gewählt werden. Dann stimmen die Kubiken k_S, k_T nach Abschnitt 2.1 überein und zerfallen in die Leitpunktgerade (Ferngerade) und den Umkreis des Dreiecks ABC.

Abbildung 9 zeigt für einen beliebigen Umkreispunkt P die Geraden $S_{AB}S_{BC}S_{CA}$ und $T_{AC}T_{CB}T_{BA}$, die ersichtlich einen Winkel von 60° einschließen. Abbildung 9

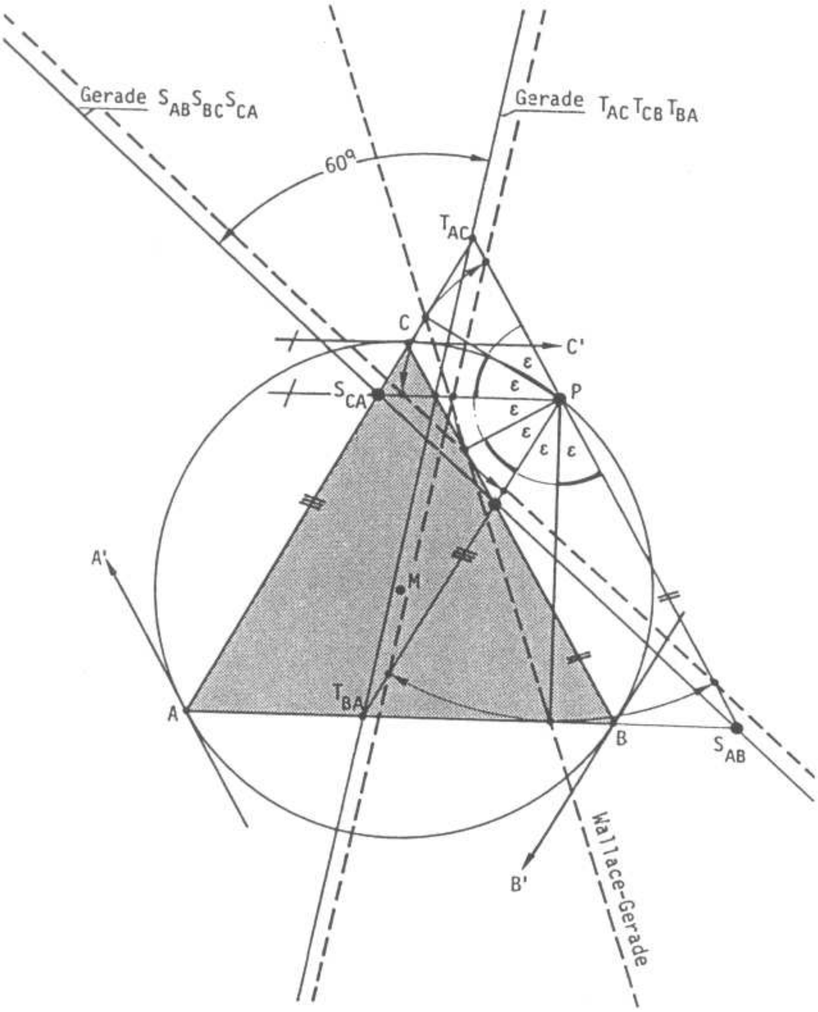

Abbildung 9

zeigt außerdem die *Wallace–Gerade*[4] desselben Umkreispunktes P zum Dreieck ABC. Dreht man die Wallace–Gerade um P im Uhrzeigersinn (Gegenzeigersinn) durch $\varepsilon = 30°$, so ist ihre Drehlage parallel zur Geraden $T_{AC}T_{CB}T_{BA}$ (bzw.

[4]Fällt man von einem Punkt P des Umkreises eines Dreiecks AC die Lote auf die Dreieckseiten, so liegen die Lotfußpunkte kollinear, auf der Wallace-Geraden von P zum Dreieck ABC.

zu $S_{AB}S_{BC}S_{CA}$). Die Wallace–Gerade von P schneidet daher jede der Geraden $T_{AC}T_{CB}T_{BA}$ und $S_{AB}S_{BC}S_{CA}$ unter 30°.

Abbildung 10 zeigt die *Hüllkurven* der Geraden $S_{AB}S_{BC}S_{CA}$ und $T_{AC}T_{CB}T_{BA}$, wenn der Punkt $P(\xi, \eta)$ den Umkreis des gleichseitigen Dreiecks ABC mit den Ecken $A(-b, 0)$, $B(b, 0)$, $C(0, b\sqrt{3}\,)$ durchläuft. Der Umkreis des Dreiecks ABC besitzt den Mittelpunkt $M(0, \frac{b}{3}\sqrt{3}\,)$ und den Radius $\overline{MP} = \frac{2b}{3}\sqrt{3}$.

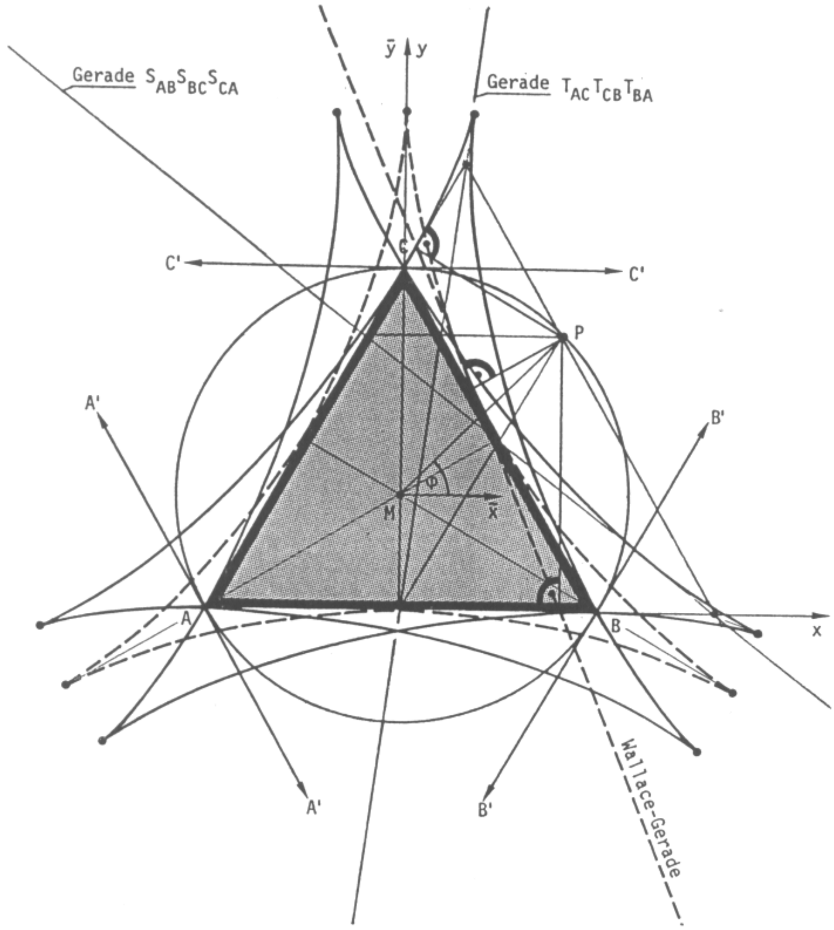

Abbildung 10

Wählt man den Winkel φ des Radius $\overline{MP}$ gegen die positive x-Achse als Parameter, so lautet die Darstellung des Umkreises

$$\xi = \frac{2b}{3}\sqrt{3}\cos\varphi, \quad \eta = \frac{b}{3}\sqrt{3}\,(1+2\sin\varphi) \qquad 0 \le \varphi < 2\pi \tag{14}$$

und die Punkte S_{AB} und S_{CA} erhalten die Koordinaten[5]

$$\begin{aligned} &S_{AB}\left(\frac{b}{3}\big[1+2\sin\varphi+2\sqrt{3}\cos\varphi\big], 0\right), \\ &S_{CA}\left(\frac{2b}{3}\big[\sin\varphi-1\big], \frac{b}{3}\sqrt{3}\,[1+2\sin\varphi]\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Legt man durch die Translation $x = \bar{x}$, $y = \bar{y} + \frac{b}{3}\sqrt{3}$ den Koordinatenursprung in den Umkreismittelpunkt M, dann erhält die Gerade $S_{AB}S_{BC}S_{CA}$ im $\bar{x}\bar{y}$-Koordinatensystem die Gleichung:

$$(1+2\sin\varphi)\bar{x} + (\sqrt{3}+2\cos\varphi)\bar{y} = \frac{2b}{3}\big(2\sin\varphi+\sqrt{3}\sin 2\varphi-\cos 2\varphi\big) =: \Omega(\varphi). \tag{16}$$

Aus (16) und der nach φ differenzierten Gleichung (16):

$$\cos\varphi\bar{x} - \sin\varphi\bar{y} = \frac{2b}{3}\big(\cos\varphi+\sqrt{3}\cos 2\varphi+\sin 2\varphi\big) =: \Lambda(\varphi) \tag{17}$$

berechnet man als *Parameterdarstellung der Hüllkurve* der Geraden $S_{AB}S_{BC}S_{CA}$:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\Omega(\varphi)\sin\varphi+\Lambda(\varphi)(\sqrt{3}+2\cos\varphi)}{2+\sin\varphi+\sqrt{3}\cos\varphi} \\ \bar{y} &= \frac{\Omega(\varphi)\cos\varphi-\Lambda(\varphi)(1+2\sin\varphi)}{2+\sin\varphi+\sqrt{3}\cos\varphi}. \end{aligned} \tag{18}$$

Die Dreieckseiten AB, BC, CA sind spezielle Geraden $S_{AB}S_{BC}S_{CA}$. Aus den Gleichungen (18) folgt:

$$\begin{aligned} &AB \text{ berührt die Hüllkurve (18) in } B \ \left(\text{für } \varphi = -30^\circ = -\frac{\pi}{6}\right), \\ &BC \text{ berührt die Hüllkurve (18) in } C \ \left(\text{für } \varphi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}\right) \text{ und} \\ &CA \text{ berührt die Hüllkurve (18) in } A \ \left(\text{für } \varphi = 210^\circ = \pi+\frac{\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

[5]Wir beschränken uns im Folgenden auf die Formeln zur Hüllkurve der Geraden $S_{AB}S_{BC}S_{CA}$.

Das Dreieck ABC ist also der Hüllkurve (18) derart einbeschrieben, daß AB in B, BC in C und CA in A die Hüllkurve berühren.

Wendet man auf (18) die Parametertransformation $t = \tan\frac{\varphi}{2}$ an, so stellt sich für die Hüllkurve (18) – nach Kürzung mit dem Faktor $\big(t + \big[2 + \sqrt{3}\,\big]\big)^2$ – die gebrochen rationale Parameterdarstellung 4. Ordnung ein:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{2b}{3}\,\frac{(5-3\sqrt{3}\,)t^4 + 2(2-\sqrt{3}\,)t\,(t^2-3t+1) + (\sqrt{3}-1)}{(2-\sqrt{3})(t^2+1)^2} \\ \bar{y} &= \frac{2b}{3}\,\frac{(2-\sqrt{3}\,)t^4 + 2t^3 + 2(4\sqrt{3}-7)t + (\sqrt{3}-2)}{(2-\sqrt{3}\,)(t^2+1)^2}. \end{aligned} \tag{19}$$

Zusammenfassend gilt:

Satz 4. *Durchläuft ein Punkt P den Umkreis eines gleichseitigen Dreiecks ABC und sind die Leitpunkte $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$ die Ferpunkte der Dreieckseiten, so ist die Hüllkurve der Geraden $S_{AB}S_{BC}S_{CA}$ (wie die Hüllkurve der Wallace–Geraden, siehe* [5], *S.856) eine geschlossene, 3-spitzige, dreiachsig symmetrische rationale Kurve 4. Ordnung (eine Steiner–Hypozykloide, siehe* [7], *S.175ff.;* [8], *S.68;* [9], *S.142).*

Der Konstruktion der Geraden $S_{AB}S_{BC}S_{CA}$ und $T_{AC}T_{CB}T_{BA}$ entnimmt man unmittelbar: Durch Spiegelung einer Geraden $S_{AB}S_{BC}S_{CA}$ an AM, BM oder CM entsteht eine Gerade $T_{AC}T_{CB}T_{BA}$ und umgekehrt. Daraus folgt:

Satz 5. *Die Hüllkurven der Geraden $S_{AB}S_{BC}S_{CA}$ und der Geraden $T_{AC}T_{CB}T_{BA}$ liegen zueinander symmetrisch bezüglich der Höhen des Dreiecks ABC (Abbildung 10).*

5. Weiterer Ausblick

Das in den Abschnitten 1.–4. vorgestellte Thema ist weiter ausbaufähig. Wir nennen dafür drei Beispiele.

(1) Eine eingehende Untersuchung der Hüllkurven der Geraden $S_{AB}S_{BC}S_{CA}$ und $T_{AC}T_{CB}T_{BA}$ (nicht nur beim gleichseitigen Dreieck mit Fernleitpunkten) auf ihre Gestalt und ihre gegenseitige Lage dürfte reizvoll sein.

(2) In Abbildung 2 ist die Bahn des Geradenschnittpunkts $S_{AB}S_{BC}S_{CA} \cap T_{AC}T_{CB}T_{BA}$ von Interesse, wenn der Punkt P den Kegelschnitt k durchläuft.

(3) Man kann der Frage nachgehen, für welche Punkte P der Dreiecksebene die sechs Punkte S_{AB}, S_{BC}, S_{CA}, T_{AC}, T_{CB}, T_{BA} auf einem Kegelschnitt liegen.

Literatur

[1] Z. Čerin, The Neuberg cubic in locus problems, *Math. Pannonica* **11** (2000), 109–124.

[2] O. Giering, Kopunktalitätsprobleme bei Dreiecken, *Österr. Akad. Wiss., Sitzungsber.* Abt. II **209** (2000), 3–18.

[3] B. Gilbert, The Lemoine cubic and its generalizations, *Forum Geom.* **2** (2000), 47–63.

[4] J. Lense, *Analytische projektive Geometrie*, R. Oldenbourg, München – Wien, 1965.

[5] J. Naas und H. L. Schmid, *Mathematisches Wörterbuch*, Band II, Akademie-Verlag Berlin und B. G. Teubner Stuttgart, 1972.

[6] G. M. Pinkernell, Cubic curves in the triangle plane, *J. Geom.* **55** (1996), 141–161.

[7] H. Schmidt, *Ausgewählte höhere Kurven*, Kesselringsche Verlagsbuchhandlung Wiesbaden, 1949.

[8] H. Schupp und H. Dabrock, *Höhere Kurven*, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim – Leipzig – Wien – Zürich, 1995.

[9] H. Wieleitner, *Spezielle ebene Kurven*, G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig, 1908.

OSWALD GIERING
ZENTRUM MATHEMATIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D-85748 GARCHING
GERMANY

(Received October, 2003)