1/2 (2003), 235–245
tmcs@math.klte.hu
http://tmcs.math.klte.hu
Teaching Mathematics and Computer Science

Un point d'heuristique important et mal connu: la particularisation

André Antibi

Résumé. Cet article est consacré à la présentation d'un point d'heuristique d'une grande importance et sur lequel on insiste très peu dans notre enseignement. C'est donc une cause fréquente d'échec pour de nombreux élèves. Il s'agit du procédé consistant à particulariser lorsqu'on dispose d'une hypothèse dont l'énoncé commence par « quel que soit… ». Plusieurs exemples dans divers domaines des mathématiques sont proposés.

Abstract. This article is devoted to the presentation of a point of heuristics of a great importance, and on which we do not lay much emphasis in our teaching. Then, it is a frequent cause of failure for many pupils. It concerns the followings process : to particularize when we dispose of an hypothesis that begins "For any…". Several examples in various domains of mathematics are proposed.

Key words and phrases: heuristique-méthodes de résolution de problèmes, quantificateur universel, particularisation.

ZDM Subject Classification: B50, C30, C70.

1. Introduction

De nombreux travaux ont été consacrés à l'heuristique et à son rôle dans les phénomènes de didactique. Le point particulier présenté dans cet article me semble être d'une très grande importance ; à mon avis on y insiste vraiment très peu dans notre enseignement.

J'ai pu constater ce point lors de très nombreuses interrogations écrites, et surtout orales, que j'ai fait passer à des étudiants. Les interrogations orales, plus de 10.000, ont essentiellement eu lieu en classes préparatoires Grandes Ecoles, et lors des épreuves orales du concours d'entrée dans les ENSI (Ecoles Nationales Supérieures d'Ingénieurs).

Très souvent, les élèves, même lorsqu'ils ont un bon niveau, sont bloqués dans une démonstration car ils ne pensent pas à utiliser le conseil heuristique suivant :

« lorsque parmi les hypothèses, l'énoncé d'une propriété commence par "quel que soit...", il est souvent utile de particulariser ». (P)

Ceci va être précisé dans la suite de cet article, et sera illustré par plusieurs exemples, concernant des propriétés mathématiques très classiques enseignées à l'université. L'utilité de ce point apparait également, bien sûr, dans de nombreux exercices.

2. Un premier exemple

Considérons la propriété très classique sur les suites de nombre réels :

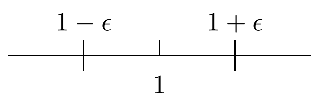
Si les suites (U_n) et (V_n) sont équivalentes, alors les nombres U_n et V_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

Rappelons que deux suites (U_n) et (V_n) sont dites équivalents si $\lim \frac{U_n}{V_n} = 1$, c'est à dire si :

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathcal{N} : \forall n \geq n_0, \quad 1 - \epsilon \leq \frac{U_n}{V_n} \leq 1 + \epsilon. \tag{h}$$

Ceci signifie que, dans tout intervale de centre 1 et de rayon ϵ, on peut trouver tous les termes $\frac{U_n}{V_n}$ à partir d'un certain rang n_0.

Figure 1.



On veut démontrer que U_n et V_n sont de même signe à partir d'un certain rang, c'est à dire que $\frac{U_n}{V_n}$ est strictement positif à partir d'un certain rang (ici, les hypothèses font intervenir les quotients $\frac{U_n}{V_n}$; il est donc naturel de caracteriser la conclusion par $\frac{U_n}{V_n} > 0$ à partir d'un certain rang).

L'énoncé de la proprtiété (h) commence par $\forall$. Il convient alors de penser au point d'heuristique (P) : ici, on peut choisir ϵ comme on veut.

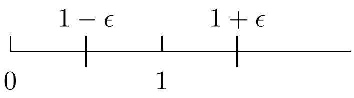
On a alors à resoudre le problème suivant : comment particulariser judicieusement ϵ.

La réponse est simple : il suffit de choisir un nombre ϵ strictement inférieur à 1.

En effet, si on désigne par n_0 un entier associé à un tel nombre ϵ on a :

$$\forall n \geq n_0, \frac{U_n}{V_n} \geq 1 - \epsilon > 0.$$

Figure 2.



Remarque : Très souvent, cette démonstration est présentée sans commentaire heuristique, en choissisant directement $\epsilon = \frac{1}{2}$. En procédant ainsi, on perd une occasion d'expliquer comment on a eu l'idée de trouver une telle valeur de ϵ. L'élève qui apprend par coeur la démonstration peut même penser que c'est la seule valeur qui lui permet de « s'en sortir... ».

3. D'autres exemples en analyse

Des situations du type précédent sont nombreuses en analyse. En effet, l'énoncé d'une définition de limite ou de continuité commence toujours par « quel que soit... ». Il convient donc de penser au point d'heuristique (P) ci-dessus chaque fois que, parmi les hypothèses, figure une propriété de limite ou de continuité. En voici des exemples très classiques.

3.1. Règle des équivalents pour les séries à termes positifs

Etant donné deux séries à termes positifs ΣU_n et ΣV_n. Si $(U_n) \sim (V_n)$, alors elles sont de même nature.

L'hypothèse $(U_n) \sim (V_n)$ s'écrit :

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathcal{N} : \forall n \geq n_0 1 - \epsilon \leq \frac{U_n}{V_n} \leq 1 + \epsilon$$

$$1 - \epsilon \leq \frac{U_n}{V_n} \leq 1 + \epsilon \Longleftrightarrow$$

$$(1 - \epsilon) V_n \leq U_n \leq (1 + \epsilon) V_n$$

car les V_n sont positifs.

Il est normal de penser alors au critère de comparaison pour les séries à termes positifs. Pour cela, il faut que les termes $(1 - \epsilon) V_n$ soient positifs, c'est à dire que $1 - \epsilon > 0$. On chosit alors $\epsilon < 1$ (par example $\epsilon = \frac{1}{2}$) et on termine aisément la démonstration.

3.2. Règle de Cauchy pour les séries à termes positifs

Soit ΣU_n une série à termes positifs. Si $(U_n)^{\frac{1}{n}}$ admet une limite et si cette limite est strictement infériure à 1, alors ΣU_n converge.

Notons $l = \lim {U_n}^{\frac{1}{n}}$; l'hypothèse $\lim (U_n)^{\frac{1}{n}} = l$ s'écrit :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathcal{N} : \forall n \geq n_0,\ l - \epsilon \leq {U_n}^{\frac{1}{n}} \leq l + \epsilon.$$

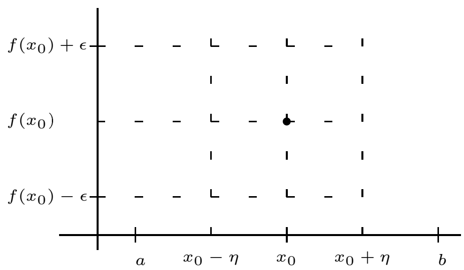
Donc, pour $n \geq n_0$, $U_n \leq (l+\epsilon)^n$. Il suffit de choisir ϵ de sorte que $l + \epsilon$ soit strictement inférieur à 1. On conclut alors d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs.

Remarque : le cas $l > 1$ se démontre de façon analogue.

3.3. Fonction d'integrale nulle

Si f est continue et positive sur $[a,b]$, et si $\int_a^b f(x)dx = 0$. Alors, $f \equiv 0$ sur $[a,b]$.

Figure 3.



On raisonne par l'absurde. Si f non identiquement nulle sur $[a,b]$, il existerait x_0 tel que $f(x_0) > 0$. f continue en x_0.
Donc

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \eta > 0 \text{ tel que : } \forall x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta],\ f(x_0) - \epsilon \leq f(x) \leq f(x_0) + \epsilon.$$

On chosisit ϵ de sorte que $f(x_0) - \epsilon > 0$ (par exemple $\epsilon = \frac{f(x_0)}{2}$). On arrive alors aisément à une contradiction en utilisant la relation de Chasles.

3.4. Construction d'une suite en posant $\epsilon = \frac{1}{n}$

Cette situation est classique en topologie. En voici deux exemples.

3.4.1. Point adhèrent à un ensemble

Si x est adhérent à A, alors il existe une suite (x_n) de points de A telle que $x = \lim x_n$.

Par hypothèse $\forall\epsilon > 0$ $B(x,\epsilon)\cap A \neq \emptyset$, en notant $B(x,\epsilon)$ la boule de centre x et de rayon ϵ. On choisit $\epsilon = \frac{1}{n}$. On note alors x_n un élément de $B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Il est alors immédiat que $x = \lim x_n$.

3.4.2. Théorème de la projection

Soit A un sous-ensemble convexe complet de E préhilbertien. Alors tout x de E admet une projection unique sur A.

Posons $\delta = d(x, A)$ c'est à dire $\delta = \inf_{a\in A} d(x, a)$. Donc, $\forall\epsilon > 0$, $\delta+\epsilon$ n'est pas un minorant de l'ensembles des nombres $d(x, a)$. Donc, $\forall\epsilon > 0\, \exists a_\epsilon \in A$: $\delta+\epsilon > d(x, a_\epsilon)$. On choisit alors $\epsilon = \frac{1}{n}$ pour construire une suite d'éléments de A, et on poursuit la démonstration.

4. Des exemples en algèbre

4.1. Orthogonal d'un espace euclidien

Soit a un élément d'un espace euclidien E. $[\forall x \in E,\ x \mid a = 0] \Longrightarrow a = 0$.

L'hypothèse « $\forall x \in E,\ x \mid a = 0$ » commence par «$\forall$». On pense donc à particulariser. On peut alors se demander s'il y a des éléments particuliers dans E. A ce stade de la démonstration, il y a deux éléments particuliers immédiats : 0 et a. On peut les « essayer successivement ».

- Si on choisit $x = 0$, on obtient $0 = 0$; donc ce choix ne donne rien d'intéressant.
- Si on choisit $x = a$, on obtient $\|a\| = 0$, c'est à dire $a = 0$. Ce choix permet donc de conclure.

Remarque. Cette manière de procéder semble laisser peu de place à l'intuition. Elle est pourtant très efficace, surtout dans le cas où la conclusion à démontrer nécessite plusieurs étapes après le choix. On a alors du mal à prévoir toutes les étapes successives et à justifier tel ou tel choix. La démonstration du théorème de Riesz dans un espace de Hilbert illustre cette situation. (Voir ci-dessous.)

4.2. Unicité de l'élément neutre

Une loi de composition interne admet au plus un élément neutre.

Notons e et e' deux éléments neutres, et démontrons que $e = e'$. Par hypothèse, on a, en notant E l'ensemble, et $*$ la loi :

$$\forall x \in E \qquad x * e = e * x = x \tag{1}$$

$$\forall x \in E \quad x * e' = e' * x = x. \tag{2}$$

On est en présence de deux hypothèses qui commencent par « $\forall$ ». On pense donc à particulariser. A ce stade de la démonstration, il y a deux éléments particuliers immédiats : e et e'. On les essaye successivement dans 1 et 2.

Dans 1 le choix $x = e$ donne $e = e = e$, donc rien d'intéressant.

Le choix $x = e'$ donne $e' * e = e * e' = e'$.

De même, dans 2 le choix $x = e$ donne

$$e * e' = e' * e = e.$$

On en déduit immédiatement que $e = e'$.

4.3. Lien entre injectivité d'une application linéaire et noyau

Soit f une application linéaire de E dans F. Alors :

$$f \textit{ injective } \iff \operatorname{Ker} f = \{0\}.$$

La démonstration de cette propriété est simple ; mais ici aussi, on peut utiliser le point d'heuristique (P). En effet.

Supposons f injective c'est à dire :

$$\forall (x, y) \in E \times E,\ f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y \tag{h}$$

et démontrons que $\operatorname{Ker} f \subset \{0\}$ (l'autre inclusion $\{0\} \subset \operatorname{Ker} f$ est immédiate).

Soit $a \in \operatorname{Ker} f$, c'est à dire tel que $f(a) = 0$. Il s'agit de démontrer que $a = 0$. L'hypothèse (h) commence par « $\forall$ » : on peut donc particulariser. A ce stade de la démonstration, il n'y a que deux éléments remarquables dans E : 0 et a. Il suffit d'utiliser l'hypothèse h dans le cas particulier $x = a$ et $y = 0$ pour conclure.

Pour démontrer l'autre implication on peut également utiliser le point d'heuristique (P).

5. Démonstration du théorème de Riesz dans un espace de Hilbert

Rappelons d'abord l'énoncé de ce théorème :

Soit H un espace de Hilbert sur $K = \mathcal{R}$ ou $\mathcal{C}$ et soit H' son dual topologique, c'est à dire l'espace vectoriel des applications linéaires et continues de H dans K. Pour chaque a de H on note f_a l'application de H dans K définie par $f_a(x) = x/a$. Alors $f_a \in H'$ et l'application f de H dans H' définie par $f(a) = f_a$ est bijective.

Le seul point qui nous préoccupe ici est la démonstration de la bijectivité de f (on sait que, en plus, f conserve la norme et vérifie : $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(\lambda x) = \bar{\lambda} f(x)$).

Démonstration de la bijectivité de f.

Soit $u \in H'$. Il s'agit de démontrer qu'il existe un élément unique a de H tel que $f(a) = u$. Utilisons la méthode par analyse-synthèse. Il s'agit, rappelons-le, d'essayer de « mettre la main » sur le seul a possible par implications successives. Nous allons proposer une telle solution en essayant de préciser pourquoi il est assez naturel de penser aux diverses implications qui interviennent.

On a d'abord, pour tout a de H :

$$\underbrace{(f(a) = u)}_{P_1} \Longrightarrow \underbrace{f_a = u}_{P_2} \Longrightarrow \underbrace{\forall x \in H,\ x/a = u(x)}_{P_3}$$

Ces deux premières implications sont en réalité des équivalences : on ne fait qu'utiliser les définitions de f, de f_a et de l'égalité de deux applications.

L'étape suivante mérite peut-être d'être introduite avec un peu plus de soin : comment obtenir des renseignements sur a à partir de la propriété P_3 ?

L'énoncé de la propriété P_3 commence par « $\forall\, x \in H$ ». On doit donc, a priori, avoir présent à l'esprit que l'on peut particulariser x comme bon nous semble.

Dans le cas qui nous intéresse, comment particulariser x pour pouvoir obtenir des renseignements sur a ? On va voir qu'ici on a vraiment peu de manières possibles de particulariser x (sans même se préoccuper de savoir si on obtient quelque chose d'intéressant sur a). En effet, la propriété P_3 fait intervenir un espace de Hilbert H absolument quelconque, et donc ne contenant a priori aucun élément particulier autre que 0, et une application linéaire u de H dans K. On voit immédiatement que, si on donne à x la valeur particuliere 0, on obtient : $0 = 0$, donc une telle particularisation ne donne rien d'intéressant. La question qui se pose alors est de savoir s'il existe d'autre éléments remarquables de H, sachant que, dans le problème qui nous intéresse, il est question d'une application linéaire u de H dans K. A ce stade de la réflexion, je considère qu'il est normal de penser aux éléments x qui appartiennent au noyau de u, c'est à dire dont l'image par u est égale à l'élément particulier 0 de K.

Nous avons cru bon d'analyser et de détailler ainsi cette étape qui, en définitive, est naturelle, car on va le voir, les autres implications conduisant à l'unique élément a que l'on cherche seront encore plus naturelles. Plus précisément, on a, pour tout a de H :

$$\underbrace{\forall x \in H,\ x/a = u(x)}_{P_3} \Longrightarrow \underbrace{\forall x \in \operatorname{Ker} u,\ x/a = 0)}_{P_4}$$

Il est alors normal, puisque l'on cherche des renseignements sur a, de dire que, d'après P_4, a appartient à l'orthogonal du sous espace vectoriel $\operatorname{Ker} u$, que nous noterons $(\operatorname{Ker} u)^{\perp}$.

On voit donc apparaître $\operatorname{Ker} u$. De quels renseignements dispose-t-on sur le noyau d'une forme linéaire continue ? Le cas où u est identiquement nulle se traite aisément : le seul élément a possible est l'élément a=0 et on vérifie que l'on a bien $f_0 = 0$. Si u n'est pas identiquement nulle, on sait alors que $\operatorname{Ker} u$ est un hyperplan. Comme de plus u est continue, cet hyperplan, image réciproque par u du fermé $\{0\}$, est fermé. $\operatorname{Ker} u$ étant un hyperplan, tous ses supplémentaires sont des droites vectorielles. Or $(\operatorname{Ker} u)^{\perp}$ en est un. En effet, dans l'espace de Hilbert H, puisque $\operatorname{Ker} u$ est un sous-espace vectoriel fermé, on a :

$$H = \operatorname{Ker} u \oplus (\operatorname{Ker} u)^{\perp}.$$

En définitive a appartient à la droite vectorielle $(\operatorname{Ker} u)^{\perp}$. Donc, pour déterminer a, il suffit d'avoir sa composante dans une base quelconque de $(\operatorname{Ker} u)^{\perp}$. Soit $\{b\}$ une base de $(\operatorname{Ker} u)^{\perp}$ (c'est à dire que b est un vecteur non nul), a est de la forme λb. On est donc ramené à déterminer l'unique valeur possible du réel λ tel que :

$$\forall x \in H, \quad x/\lambda b = u(x)$$

c'est à dire : $\forall x \in H$, $\overline{\lambda}(x/b) = u(x)$.

Cette propriété commence par « $\forall$ » : on va de nouveau utiliser le point d'heuristique (P). Il suffit, pour avoir λ, de pouvoir diviser par le nombre (x/b). Il est donc normal de prendre pour x un élément tel que x/b ne soit pas nul, c'est à dire n'importe quel x n'appartenant pas à $\operatorname{Ker} u$. Or, ici, il y a un élément « privilégié » qui n'appartient pas à $\operatorname{Ker} u$: c'est b.

On obtient pour $x = b$:

$$\lambda = \frac{\overline{u(b)}}{\|b\|^2}.$$

On démontre donc ainsi, qu'il y a au plus un élément a possible : $a = \frac{\overline{u(b)}}{\|b\|^2}$; où b est un vecteur non nul de $(\operatorname{Ker} u)^\perp$. On termine alors la démonstration en démontrant que, réciproquement, cet élément x convient, c'est à dire que :

$$\forall x \in H, \quad (x/\lambda b) = u(x).$$

6. Inégalité de Cauchy–Schwarz

Etant donné un espace préhilbertien E, on a : $\forall (x,y) \in E \times E$, $|x/y| \leq \|x\|\|y\|$.

La démonstration usuelle de cette propriété commence ainsi : Soit $(x,y) \in E \times E$. $((\lambda x + y)/(\lambda x + y)) \geq 0$ pour tout scolaire λ. On obtient alors, en développant, une équation du second degré en λ (si $x \neq 0$). En écrivant que son discriminant est négatif, on obtient l'inégalité voulue.

J'ai présenté très souvent cette démonstration à mes étudiants, en considérant que le départ était astucieux. Je me suis rendu compte récemment que le point d'heuristique (P) peut permettre de rendre ce départ naturel. En effet, E étant un espace prehilbertien quelconque, on ne dispose que des propriétés des espaces vectoriels et de celles d'un produit scalaire. Parmi ces propriétés, il est normal de penser à utiliser celle qui fait intervenir la relation d'ordre (puisque il en est ainsi dans la conclusion) :

$$\forall u \in E, \; u/u \geq 0.$$

Cette propriété commence par « $\forall$ ». On peut donc penser au point d'heuristique (P). A ce stade de la démonstration, il y a trois éléments remarquables dans E : $0, x$ et y. En prenant pour u l'un de ces éléments, on n'obtient rien d'intéressant, bien sûr. On cherche alors à particulariser en choisissant un élément faisant intervenir x et y, puisque dans la conclusion ces deux éléments figurent. J'estime qu'il est alors naturel de penser aux points de la droite vectorielle contenant x et y ; cette particularisation permet d'aboutir.

7. Particularisation déjà indiquée

La particularisation est un point essentiel de l'activité mathématique. Elle intervient chaque fois qu'on fait appel à un théorème dont l'énoncé commence par «$\forall$». Ce type de théorème est très fréquent.

7.1. Un exemple en géometrie : le théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle $ABC, \ldots$

Dans le début de cet énoncé figure implicitement «$\forall$». En effet, le théorème consiste à indiquer que, quel que soit le triangle rectangle $ABC, \ldots$

Dans un exercice, on l'applique au triangle rectangle que l'on souhaite. Mais dans ce cas, la particularisation est déjà proposée. L'élève n'a pas à en prendre l'initiative.

Il est clair que les exemples de ce type sont très fréquents.

Références

[1] A. Antibi, Etude sur l'enseignement de méthodes de démonstration, *Enseignement de la notion de limite : réflexions, propositions*, Thèse d'Etat, Mention Didactique des Mathématiques, 1988.

[2] A. Antibi, Une méthode de démonstration consistant à partir de la conclusion, *Bulletin National de l'A.P.M.E.P.* (Avril 1991).

[3] A. Antibi, Graphique, démonstration et rigueur : quelques réflexions, *Acte Colloque CIEAEM* (1995).

[4] A. Antibi, Les niveaux de rigueur dans programmes : un exemple d'ensemble vide ?, *Bulletin APMEP*, no. 410 (1997).

[5] A. Antibi et G. Brousseau, La dé-transposition de connaissances scolaire, *Recherche en Didactique des Mathématiques* **20**, no. 1.

[6] G. Glaeser, *Une introduction à la didactique expérimentale des Mathématiques*, Edition La Pensée Sauvage, Grenoble, 1999.

[7] E. Locia Espinoza, *Les contre-exemples dans l'enseignement des mathématiques*, Thèse de Didactique des Mathématiques, IREM de Toulouse, 2000.

[8] G. Pólya, *Comment poser et resoudre un problème*, Dunod, Paris, 1965.

[9] A. H. Schoenfeld, *Mathematical problem solving*, Academic Press, Inc., 1985.

[10] D. Solow, *How to read and do proofs*, John Wiley and Sons, New York, 1982.

ANDR ANTIBI
DIRECTEUR DE L'IREM DE TOULOUSE
UNIVERSIT PAUL SABATIER
TOULOUSE
FRANCE

E-mail: antibi@cict.fr

(Received March, 2003)