

## Beweise von Sätzen mit Hilfe der Modelle der hyperbolischen Geometrie

JENŐ HORVÁTH

*Herrn Professor Dr. L. Tamássy zum 80. Geburtstag gewidmet*

*Abstract.* We give simple proofs for some problems of elemental hyperbolic geometry using the Poincaré's half-sphere model. Our method is that a point of a figure is transformed to a special point of the model.

*Key words and phrases:* models of hyperbolic plane, h-reflection.

*ZDM Subject Classification:* 51M09, 97B50.

1. Die hyperbolische Ebene, oder die Bolyai–Lobatschewskische (kurz B-L) Ebene hat verschiedene Modelle. Die bekanntesten von diesen sind das Kreismodell (PK), das Halbebene-Modell (PS) und das Halbkugelmodell (PG) von Poincaré, das Modell von Cayley und Klein (CK), das Polarkoordinatenmodell (P) und das Modell von Weierstrass (W). Die Modelle werden für die Veranschaulichung des Aufbaus der B-L Geometrie, für den Beweis der relativen Widerspruchsfreiheit sehr oft verwendet, aber für Beweise von Sätzen weniger. Die Beweise mit Anwendung eines Modells sind im allgemeinen kompliziert. Es werden nämlich nicht ausgenutzt, dass das Modell in der euklidischen Ebene oder im Raum ist und spezielle h-Punkte und h-Geraden im Modell existieren. Zum Beispiel der Mittelpunkt des Kreises im Fall der CK, PK und PS Modelle, der Pol der Halbkugeloberfläche des PG Modells, seine orthogonale Projektion auf die Ebene des Grenzkreises  $g$  der Halbkugel, d.h. der Mittelpunkt von  $g$ . Wir können über elementare und nicht elementare Modelle der B-L Geometrie sprechen. Man

kann die Modelle von Poincaré als elementar betrachten. Die in dieser Arbeit behandelten Themen sind elementar und nur Kenntnisse in der Mittelschule werden beansprucht. Die Leute, die projektive Geometrie kennen, wenden das CK Modell gern an. Wir bemerken, dass auch das CK Modell elementar ist, wenn wir das als orthogonale Projektion des PG Modells betrachten. Zum Beispiel wir führen Konstruktionen im PG Modell durch, dann nehmen wir die senkrechte Projektion.

Wenn wir ausser der Veranschaulichung noch mehr mit Anwendung eines Modells zeigen möchten, dann ist die Hauptfrage, wie die Kongruenz und die Spiegelung an einer Geraden definiert werden.

In dieser Arbeit geben wir einfache Lösungen für einige Aufgaben mit der Methode, dass wir einen Punkt irgendeiner Figur in den speziellen Punkt des Modells transformieren. Davor fassen wir die wichtigsten über das von uns angewandte Modell der B-L Geometrie.

## 2. Das PG Modell

Es sei  $\Gamma$  eine offene Halbkugeloberfläche im euklidischen Raum (E). Mit  $g$  bezeichnen wir ihren Grenzkreis. Die Punkte von  $\Gamma$  werden als h-Punkte der ebenen B-L Geometrie betrachtet. Die zu  $g$  senkrechten Halbkreise von  $\Gamma$  sind die h-Geraden. Man überzeugt sich, dass die Inzidenz und Anordnungsaxiome der B-L Geometrie auch für die oben definierten Punkte und Geraden erfüllt sind und dass es zu einer h-Geraden mehrere Nichtschneidende gibt. Es sei  $t$  eine h-Gerade. Wir definieren die h-Spiegelung an  $t$ . Enthält  $t$  den Pol des Modells, dann ist die h-Spiegelung die Spiegelung an der Ebene von  $t$ . Im anderen Fall betrachten wir den zu  $t$  gehörigen Berührungskegel von  $\Gamma$ . Es sei  $K$  die Spitze des Kegels. Das Spiegelbild des h-Punktes  $P$  an  $t$  (Abbildung 1) ist der Punkt  $P' = KP \cap \Gamma$ . Es ist zu beweisen, dass diese h-Spiegelung besitzt alle der Eigenschaften, die die Spiegelung in der euklidischen Geometrie aufweisen kann. Die Kongruenztransformation wird als Produkt von endlich vielen h-Spiegelungen an Geraden definiert. Es ist zu beweisen, wenn zwei Figuren kongruent sind, dann ist eine in die andere mit Anwendung von höchstens drei h-Spiegelungen an Geraden übergeführt werden.

Es seien die Punkte  $A$  und  $B$  angegeben. Dann existiert eine Spiegelungsachse  $t$ , wobei  $A$  und  $B$  entsprechende Punkte bei der h-Spiegelung an  $t$ . Sogar können wir auch die Spiegelungsachse sehr einfach konstruieren. Wir drehen die Ebene des zur h-Gerade  $AB$  gehörigen Halbkreises um die Schnittgerade des Halbkreises und der Ebene von  $g$  in die Ebene von  $g$ . Nach der Anwendung dieser Drehung

erhält man die Punkte  $(A)$  und  $(B)$ . Auf der Abbildung 2 sieht man die Konstruktion der Spitze  $K$  des zu  $t$  gehörigen Kegels, wenn  $(A)(B)$  und  $AB$  nicht parallel sind. Wenn  $(A)(B) \parallel AB$  ist, dann enthält  $t$  den Pol des PG Modells, statt Berührungskegel haben wir Berührungszylinder. Auch die Konstruktion der Symmetrieachse von zwei h-Geraden ist einfach. Die Winkelmetrik des PG Modells ist euklidisch, die Spiegelung an Geraden ist winkeltreu. Wir bemerken, dass man die obigen Behauptungen mit Anwendungen der stereographischen Projektion beweisen kann.

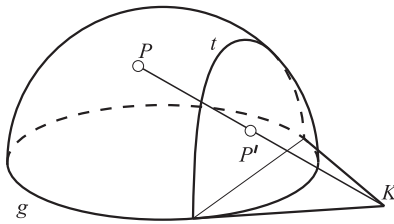


Abbildung 1

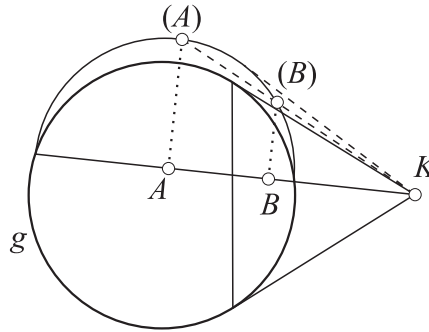


Abbildung 2

### 3. Einige einfache Aufgaben

#### 3.1. Die Höhenlinien eines Dreiecks bilden einen Büschel.

Beim Beweis verwenden wir die folgende einfache Tatsache. Wenn die h-Gerade  $e$  den Pol des PG Modells enthält, dann sind die zu  $e$  senkrechten h-Geraden auch im euklidischen Sinne orthogonal zu  $e$ . In diesem Fall ist auch die orthogonale Projektion der im hyperbolischen Sinne senkrechten Geraden auf die Ebene von  $g$  orthogonal.

Nun betrachten wir eine Spiegelung, die die Ecke  $A$  des Dreiecks  $ABC$  in den Pol des PG Modells überführt. (Die Spiegelbilder werden mit denselben Buchstaben bezeichnet.) Dann projizieren wir das erhaltene Dreieck orthogonal zur Ebene von  $g$ . Die Projektionsbilder werden mit Strich bezeichnet. Die Geraden  $A'C'$ ,  $A'B'$ ,  $m'_a$  gehen durch den Pol des Modells hindurch. Deshalb gelten  $m'_b \perp A'C'$ ,  $m'_c \perp A'B'$  und  $m'_a \perp B'C'$ . Die Höhenlinien eines Dreiecks in der euklidischen Ebene schneiden einander in einem Punkt. Dann bilden auch die h-Geraden  $m_a$ ,

$m_b$  und  $m_c$  einen Büschel, die aus schneidenden, oder parallelen, oder nichtschneidenden Geraden besteht.

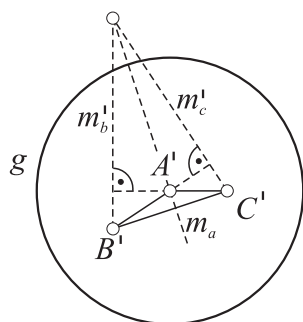


Abbildung 3

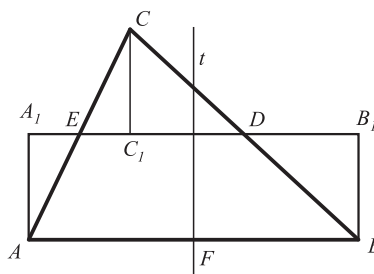


Abbildung 4.a

### 3.2. Die Schwerlinien eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.

Zuerst beweisen wir, dass die Mittelsenkrechte von  $AB$  des Dreiecks  $ABC$  senkrecht zu  $AB$  gehörige Mittellinie  $ED$  (Abbildung 4.a) ist.

Die Gerade  $CC_1$  ist senkrecht zur Mittellinie  $ED$ , wobei  $C_1$  Punkt der Geraden  $ED$  ist. Dann spiegeln wir das Dreieck  $CC_1D$  bzw.  $CC_1E$  an  $D$  bzw. an  $E$  und erhalten wir das kongruente Dreieck  $BB_1D$  bzw.  $AA_1E$ , wobei  $B_1$  bzw.  $A_1$  Punkt der Mittellinie ist. Das Dreieck  $ABC$  und das Saccheri-Viereck  $ABB_1A_1$  sind also zerlegungsgleich. Das gilt auch im Fall, wenn  $C_1$  kein Punkt der Strecke  $ED$  ist. Die Mittelsenkrechte  $t$  von  $A_1B_1$  ist eine Symmetrieachse des Vierecks  $ABB_1A_1$ , folglich gilt  $t \perp AB$  und  $t$  halbiert die Seite  $AB$ .

Es sei  $F$  der Halbierungspunkt von  $AB$ . Nun betrachten wir eine Spiegelung, die den Punkt  $F$  in den Pol des PG Modells überführt. (Die Spiegelbilder werden mit denselben Buchstaben bezeichnet.) Dann projizieren wir das Dreieck orthogonal zur Ebene von  $g$ . Die Projektionsbilder (Abbildung 4.b) werden wie oben mit Strich bezeichnet. Aus  $AF = BF$  folgt  $A'F' = B'F'$  auch im euklidischen Sinne.

Es gilt  $AB \perp t \perp ED$  und  $t'$  ist der Durchmesser von  $h$ , deshalb ist  $A'B' \perp t \perp E'D'$  im euklidischen Sinne, d.h.  $A'B' \parallel E'D'$ . Das Viereck  $A'B'E'D'$  ist also ein Trapez. Es ist bekannt, dass die Gerade, die durch den Schnittpunkt der Diagonalen und durch den Schnittpunkt der Schenkelgeraden hindurchgeht, die Grundlinien von  $A'B'E'D'$  halbiert. Deshalb haben die Strecken  $A'D'$ ,  $B'E'$ ,  $C'F'$  einen gemeinsamen Punkt, d.h., die Schwerlinien des Dreiecks  $ABC$  schneiden einander in einem Punkt.

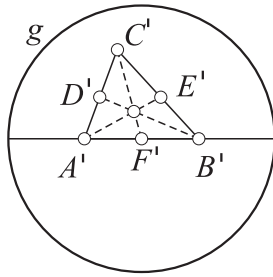


Abbildung 4.b

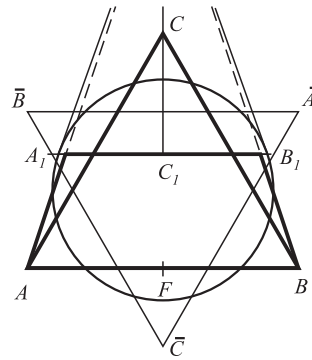


Abbildung 5

3.3. Bui van Dung [BVD] beschäftigte sich mit den Eigenschaften von Dreiecken, deren Ecken ideale Punkte (Abbildung 5) und deren Seiten eigentlich sind. Unter anderem hat er mit Methoden der projektiven Geometrie (nicht einfach) bewiesen, dass die Schwerlinien des Dreiecks  $ABC$  mit idealen Ecken einander in einem Punkt schneiden. (Die zur Ecke  $C$  gehörige Schwerlinie ist die Gerade  $CF$ , d.h.  $CF \perp \bar{A}\bar{B}$ .) Der Beweis geht ebenso wie für eigentliche Dreiecke. Das Dreieck  $ABC$  und das "Saccheri-Viereck"  $ABB_1A_1$  sind zerlegungsgleich wie in 3.2. Im weiteren geht der Beweis ebenso wie in 3.2.

3.4. Die Autoren behandeln die Eigenschaften des rechtwinkligen Sechsecks in mehreren Arbeiten (Fenchel [FW], Berger [BM], Vermes [VI]). Unter anderem beweisen sie, dass die gemeinsamen Senkrechten der gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks in einem Punkt einander schneiden. Mit den obigen Methoden können wir das einfach beweisen.

Nun betrachten wir das Dreieck mit idealen Ecken  $A, B, C$  und eigentlichen Seiten, weiterhin die gemeinsamen Lote der Seiten (Winkelgeraden). Diese Lote bilden ein Dreieck mit idealen Ecken  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ . Als Durchschnitt der Dreiecke  $ABC$  und  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  entsteht ein rechtwinkliges Sechseck. Die Ecken des Sechsecks seien mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 bezeichnet. Der obige Satz für rechtwinklige Sechsecke lautet folgenderweise.

3.4.1. *Der Höhenschnittpunkt des Dreiecks  $ABC$  mit idealen Ecken und eigentlichen Seiten und der Höhenschnittpunkt des Dreiecks  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  bestimmt durch den Winkelgeraden von  $ABC$  (Abbildung 6) stimmen überein.*

(Wir bemerken, dass die Dreiecke  $ABC$  und  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  Polardreiecke sind und für das Dreieckspar der Satz von Desargues gilt. Der Beweis kann projektiv sein.)

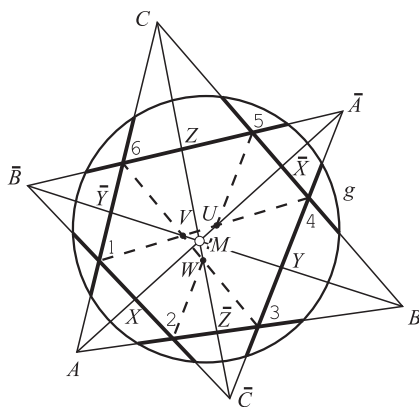


Abbildung 6

BEWEIS. Für die Geraden  $A\bar{A}$ ,  $B\bar{B}$ ,  $C\bar{C}$  gelten  $\bar{B}\bar{C} \perp A\bar{A} \perp BC$ ,  $\bar{A}\bar{C} \perp B\bar{B} \perp AC$ ,  $\bar{A}\bar{B} \perp C\bar{C} \perp AB$ , d.h., die Höhenlinien der Dreiecke  $ABC$  und  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  paarweise gleich sind. Wir zeigen, dass der Höhenschnittpunkt existiert. Es sei  $X = A\bar{A} \cap \bar{B}\bar{C}$ ,  $\bar{X} = A\bar{A} \cap BC$ ,  $Y = B\bar{B} \cap \bar{A}\bar{C}$ ,  $\bar{Y} = B\bar{B} \cap AC$ ,  $Z = C\bar{C} \cap \bar{A}\bar{B}$ ,  $\bar{Z} = C\bar{C} \cap AB$ . Dann spiegeln wir an Geraden, die den Punkt  $\bar{Z}$  in den Pol des Modells (CK Modell, oder PG Modell) überführt. Nach der Projizierung auf die Ebene von  $g$  werden  $A'B'$  und  $C'\bar{C}'$  die Durchmesser von  $g$ . Folglich sind die zu  $A'B'$  und  $C'\bar{C}'$  senkrechten Geraden auch im euklidischen Sinne orthogonal. Aus den obigen folgt, dass  $A'B'$  die Achse  $x$  und  $C'\bar{C}'$  die Achse  $y$  eines kartesischen Koordinatensystems sein kann. Das Viereck  $2'3'A'B'$  ist ein Rechteck im euklidischen Sinne.

Die entsprechenden Punkte der Figur der Abbildung 6 liegen nach Abbildung 7. Es sei der Radius des Kreises  $g$  die Einheit. Es seien  $2'(a, 0)$ ,  $3'(b, 0)$ ,  $Z'(0, c)$ . Dann sind  $A'(-\frac{1}{a}, 0)$ ,  $B'(\frac{1}{b}, 0)$ ,  $C'(0, \frac{1}{c})$ ,  $\bar{A}'(b, c)$ ,  $\bar{B}'(a, c)$ .

Die Gleichung der Geraden  $A'\bar{A}'$  ist  $y = \frac{c}{b-\frac{1}{a}}(x - \frac{1}{a}) = \frac{ac}{ab-1}x - \frac{c}{ab-1}$ .

Mit Vertauschen von  $a$  und  $b$  erhält man die Gleichung  $y = \frac{bc}{ab-1}x - \frac{c}{ab-1}$  der Geraden  $B'\bar{B}'$ , d.h., die Geraden  $A'\bar{A}'$ ,  $B'\bar{B}'$ ,  $C'\bar{C}'$  schneiden sich im Punkt  $M'$ . Folglich schneiden sich auch die Geraden  $A\bar{A}$ ,  $B\bar{B}$ ,  $C\bar{C}$  schneiden sich im Punkt  $M$ .

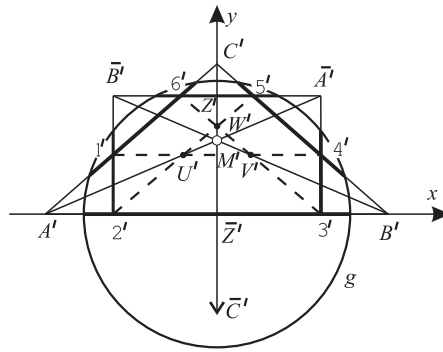


Abbildung 7

3.4.2. Nun betrachten wir die Diagonalen 14, 25, 36 des Sechsecks 123456. Der Schnittpunkt von zwei Diagonalen liegt auf einer der Höhenlinien  $A\bar{A}$ ,  $B\bar{B}$ ,  $C\bar{C}$ . (Nach Abbildung 6 gilt  $U = 14 \cap 25 \in A\bar{A}$ ,  $V = 14 \cap 36 \in B\bar{B}$ ,  $W = 25 \cap 36 \in C\bar{C}$ .)

Wir zeigen, dass z. B.  $W = 25 \cap 36 \in C\bar{C}$  gilt. Wir wenden die Bezeichnungen der Abbildung 7. Mit Methode in 3.4.2 erhält man  $5'(\frac{1}{b}(1-c^2), c)$  für den Punkt  $5' = \bar{A}'\bar{B}' \cap B'C'$ , wobei die Gleichung von  $B'C'$   $bx + cy = 1$  ist. Dann ist die Gleichung von  $2'5'$

$$y = \frac{bc}{1-c^2-ab}x - \frac{abc}{1-c^2-ab}.$$

Mit Vertauschen von  $a$  und  $b$  ergibt sich die Gleichung von  $3'6'$

$$y = \frac{ac}{1-c^2-ab}x - \frac{abc}{1-c^2-ab},$$

d.h., die Geraden  $2'5'$ ,  $3'6'$  und  $C'\bar{C}'$  schneiden einander in einem Punkt.

3.4.3. Wenn  $W = M$  ist, dann sind  $U = M$  und  $V = M$ , d.h., die Diagonalen 14, 25, 36 schneiden sich im Punkt  $M$ . Der Punkt  $M$  ist das Symmetriezentrum des Sechsecks 123456 und die Dreiecke  $ABC$  und  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  sind symmetrisch an  $M$ .

BEWEIS. Der erste Teil des Beweises ist auf Grund von 3.4.1 und 3.4.2 trivial. Wir spiegeln derart, dass  $M$  der Pol des Modells ist. Nach der orthogonalen Projektion auf die Ebene von  $g$  erhält man, dass  $A'\bar{A}'$ ,  $B'\bar{B}'$ ,  $C'\bar{C}'$  (Abbildung 8) die Durchmesser von  $g$  sind. Folglich sind die zu  $A'\bar{A}'$ ,  $B'\bar{B}'$ ,  $C'\bar{C}'$  senkrechten Geraden auch im euklidischen Sinne orthogonal, d.h., die gegenüberliegenden Seiten

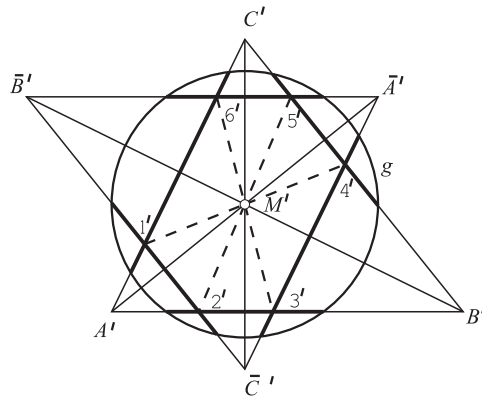


Abbildung 8

des Sechsecks sind parallel. Die Diagonalen  $1'4'$ ,  $2'5'$ ,  $3'6'$  schneiden einander im Punkt  $M'$ , deshalb ist das Sechseck  $1'2'3'4'5'6'$  zentralsymmetrisch. Der Punkt  $M'$  ist also der Mittelpunkt des Kreises, deshalb ist  $M'$  der Halbierungspunkt der Diagonalen  $1'4'$ ,  $2'5'$ ,  $3'6'$ . Daraus folgt schon die Behauptung.

3.4.4. Wenn die Diagonale  $1_4$  des Sechsecks  $123_456$  orthogonal zu  $C\bar{C}$ , dann ist  $C\bar{C}$  die Symmetrieachse des Sechsecks und damit der Dreiecke  $ABC$  und  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ .

BEWEIS. Die Spiegelung an  $C'\bar{C}'$  ist eine Spiegelung auch im euklidischen Sinne, wenn  $C'\bar{C}'$  der Durchmesser von  $g$  ist. Ist  $4'$  das Spiegelbild von  $1'$ , dann ist die Behauptung richtig. Gilt das nicht und liegt das Spiegelbild von  $1$  z. B. näher zu  $C'\bar{C}'$  als  $4'$ , dann gelten für die Spiegelbilder (mit zwei Strich bezeichnet)  $4'' \in Z'5'$ ,  $2'' \in Z''3'$ . Im Sechseck  $2''3'4'5'6''1''$  ist die Summe der Winkel  $4\pi$ , was unmöglich ist.

3.4.5. Wenn die zu 3.4.4 analogen Behauptungen gelten für die Diagonalen  $A'\bar{A}'$  und  $B'\bar{B}'$ , dann ist das Sechseck  $123_456$  und damit die Dreiecke  $ABC$  und  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  regulär. (In diesem Fall gilt  $U = V = W = M$ .)

Die Behauptung ist eine einfache Folge von 3.4.3 und 3.4.4.



## Literatur

- [BM] M. Berger, *Geometry I-II.*, Springer Verlag, Berlin – New York – Heidelberg, 1996, 2nd printing.
- [BVD] Van Dung Bui, Some properties of polygons of ideal vertices, *Mat. Lapok* **32** (1981-85), 219–228 (in Hungarian).
- [FW] W. Fenchel, *Elementary Geometry in Hyperbolic Space*, Walter de Gruyter, Berlin – New York, 1989.
- [VI] I. Vermes, Rein geometrischer Beweis einiger Schnittpunktsätze bezüglich der rechtwinkligen Sechsecke der hyperbolischen Ebene, *Topics in Algebra Analysis und Geometry*, Gy. Strommer Nat. Mem. Conf. Balatonfüred, 1999, 255–262.

JENŐ HORVÁTH  
WESTUNGARISCHE UNIVERSITÄT  
SOPRON  
HUNGARY

*(Received April, 2003)*