20/1 (2022), 87–105
DOI: 10.5485/TMCS.2022.0538
tmcs@science.unideb.hu
http://tmcs.math.unideb.hu

Teaching
Mathematics and
Computer Science

Lehre der Trigonometrie anhand realistischer Aufgaben im Online-Unterricht

Kornélia Ficzere und Ágota Figula und Carolin Hannusch und Emese Kása

Abstract. The aim of our study was to explore the effects of the active use of realistic exercises in the field of trigonometry. We taught a group of 14 pupils, who were in grade 11. The most of them told us they did not plan mathematics-related studies in the future. We included realistic exercises into our teaching plan, which covered the fields of scalar product, as well as the sine and cosine theorems. Our teaching experiment was done within the framework of online teaching. Effects on the motivation, performance and results of the students were taken into consideration. We also attempted to examine the effects of online teaching on motivation and whether the use of realistic exercises is worthwhile in an online classroom environment. Performance of the students showed a tendency of improvement when they were dealing with the material through realistic exercises even despite the teaching happened online.

Key words and phrases: realistic exercises in mathematics teaching, online teaching environment, teaching trigonometry in class 11.

MSC Subject Classification: 97C70, 97D40, 97G60.

This paper was supported by the National Research, Development and Innovation Office (NKFIH) Grant No. K132951.

1. Einleitung

Seit Langem suchen wir eine Antwort auf die Frage wie wir Schülerinnen und Schüler [1] mehr für Mathematik begeistern können und auch jene Schüler, die sich nicht besonders für Mathematik interessieren, im Unterricht motivieren mögen. Wie können wir zeigen, dass es sich lohnt, für dieses Schulfach zu lernen? Unserer Meinung nach können realistische Aufgaben dabei helfen, Schüler zu animieren, Mathematik zu lernen. Mithilfe dieser Aufgaben können wir den Schülern auch zeigen, wie sie mathematische Kenntnisse im Alltag anwenden können. Wir haben die Trigonometrie als Thema gewählt, weil wir meinen, dass dieser Bereich der Mathematik in vielen Gebieten des täglichen Lebens anwendbar ist. Mithilfe der Trigonometrie können wir leicht zum Vorschein bringen, wie wichtig Mathematik in unserem Leben ist.

Außerdem hoffen wir, dass durch einen Mathematikunterricht mit realistischem Bezug die Aufmerksamkeit der Schüler besser erregt werden kann und sich dadurch auch die erbrachten Leistungen verbessern werden. Weiterhin nehmen wir an, dass Schüler den Zusammenhang zwischen verschiedenen Bereichen der Mathematik einfacher erkennen werden, wenn sie einen Bezug zur Realität sehen. Um unsere Thesen zu untersuchen, haben wir einen Unterrichtsplan zusammen gestellt, der auf realistischen Aufgaben basiert. Diesen Unterrichtsplan haben wir in einer solchen Gruppe angewandt, deren Mitglieder sich zu Beginn des Unterrichts nicht für Mathematik interessierten. Wir gestalteten unseren Unterricht aufgabenorientiert und verwendeten neben klassischen Mathematikaufgaben auch Aufgaben mit Wirklichkeitsbezug.

2. Theoretischer Hintergrund

Der realistische Mathematikunterricht wurde durch die didaktische Arbeit des niederländischen Mathematikers Hans Freudenthal und durch das Wiskobas Projekt in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts entwickelt, als die Mathematiker und Lehrer der westlichen Länder den Mathematikunterricht reformieren wollten (Csíkos & Verschaffel, 2011, pp. 59–97). Das Wiskobas Projekt wurde 1968 in den Niederlanden ins Leben gerufen, um in erster Linie das Lehramt zu reformieren. Aufgrund technischer Gründe wurde es erst 1971 durchgesetzt (Treffers, 2012).

[1] Im folgenden Text verwenden wir das generische Maskulinum *Schüler* für Schülerinnen und Schüler.

Die didaktische Arbeit von Hans Freudenthal und seinen Initiativen haben eine bedeutende Rolle in der Entwicklung der Methode des realistischen Mathematikunterrichts gespielt. Eins seiner Hauptwerke in diesem Thema ist das 1973 erschienene Buch *Die Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Seine neue Unterrichtsmethode, mit der er sich in diesem Buch befasst, wurde *Nacherfindung* genannt. Durch diese Methode versuchte er die Schüler dazu zu bringen, mehr Selbständigkeit in der Unterrichtsstunde zu üben. Seiner Meinung nach sollen die Schüler das Wissen selbst erwerben, den neuen Lehrstoff *nacherfinden*, und nicht einfach die von anderen aufgestellten Hypothesen akzeptieren. Nach Freudenthal spielt die Lehrperson in der *Nacherfindung* keine wesentliche Rolle. Die Aufgabe der Lehrperson ist es, die Schüler zu unterstützen, während sie sich selbst neues Wissen aneignen (Lübbert, 2017). Diese Idee der Nacherfindung spiegelt sich übrigens auch in anderen Bereichen und Lehrmethoden wider, z.B. beim entdeckenden Lernen. Freudenthal beschäftigte sich auch mit der Frage der Motivation, die sehr wichtig für unser Unterrichtsexperiment ist. Freudenthal unterscheidet drei Arten der Motivation (Freudenthal, 1978, pp. 180–186).

- Motivation durch Selbständigkeit im Lernprozess: die Schüler sollen das neue Wissen selbst entdecken, um ein Aha-Erlebnis zu erfahren. Auf diese Weise werden die Schüler viel mehr in den Lernprozess eingebunden und sie können verstehen, dass wir *lernen um zu können*.
- Motivation durch Zielsetzung: die Lehrperson sollte den Schülern solche Ziele setzen, die erreichbar und verständlich sind, um die Schüler entsprechend zu motivieren.
- Motivation durch Veranschaulichung: Bilder und Illustrationen sind in den Lehrmaterialen kreativ zu verwenden, sodass die Schüler sich besser vorstellen können, was sie rechnen.

Eine weitere Quelle war für uns die Dissertation von Ferenc Várady (Várady, 2017). Er hat die Anwendung realistischer Aufgaben im Themenbereich exponentieller und logarithmischer Funktionen untersucht. Mithilfe der Prinzipien von Freudenthal (Freudenthal, 1973),(Freudenthal, 1978) versuchten wir einen Unterrichtsplan mit wirklichkeitsbezogenen Aufgaben zu erstellen. Unser Ziel war es einerseits, die Schüler mehr zum Mathematik lernen anzuregen und andererseits wollten wir auch erreichen, dass sich die Leistungen der Schüler im Fach Mathematik verbessern. Außerdem ist es unser Ziel, das Interesse der Schüler für Mathematik nachhaltig zu wecken, indem wir die Methode von Freudenthal in der Praxis anwenden. Zusätzlich wollten wir noch erfahren, wie ein Unterricht mit Realbezug in einer ungarischen Klasse konkret angenommen wird. Weiterhin haben wir den Nationalen Grundlehrplan 2012 mit dem Nationalen Grundlehrplan 2020 verglichen, zu erfahren, wie sich der Mathematikunterricht bezüglich Realität in den letzten acht Jahren in Ungarn verändert hat. In beiden Grundlehrplänen wird hervor gehoben, dass der Lehrer die Rolle der Mathematik in dem Alltag betonen und den Zusammenhang mit anderen Schulfächern aufzeigen soll. Die zwei Grundlehrpläne unterscheiden sich vor allem in der vorgeschlagenen Tätigkeiten, die angewandt werden sollen, um die Mathematik mit der realen Welt zu verknüpfen.

Im Nationalen Grundlehrplan von 2012 wird in Bezug auf Trigonometrie besonders die Verbindung mit anderen Schulfächern hervorgehoben. Hingegen wird im Nationalen Grundlehrplan von 2020 auch die Funktion von Mathematik im täglichen Leben betont. Im neueren Lehrplan werden die Lehrer dazu ermutigt, wirklichkeitsentsprechende Daten zu benutzen und die Schüler auf Dinge und Erscheinungen in ihrer unmittelbaren Umgebung aufmerksam zu machen. In den letzten Jahren ist es immer weiter in den Vordergrund gerückt, den Mathematikunterricht realbezogener zu gestalten, in dem zum Beispiel Aufgaben mit wirklichkeitsgetreuen Daten und Sachverhalten, anhand vorstellbaren Situationen aus dem alltäglichen Leben und aus der Fantasiewelt in den Unterrichtsstunden verwendet werden (Ambrus, 2018), (Ambrus, Kónya, Kovács, Szitányi, & Csíkos, 2019). An dieser Stelle möchten wir darauf hinweisen, dass die von uns angewandte Methode zwar Teil der realistischen Lehrmethode ist, diese aber weitaus mehr beinhaltet als die Anwendung wirklichkeitsbezogener Aufgaben im Unterricht (Ambrus et al., 2019), (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2020). Da unser Experiment zeitlich auf vier Wochen begrenzt war und zudem wegen der Covid-19 Pandemie während des Fernunterrichts mittels online und offline Stunden statt fand, begrenzen wir unsere Forschung hauptsächlich auf die Anwendung wirklichkeitsbezogener (realer) Aufgaben im Unterricht und untersuchen, welche Wirkung die Verwendung von Aufgaben mit Wirklichkeitsbezug auf die Lernergebnisse der Schüler hatte.

3. Fragen zur Forschung

Zu Beginn unseres Experimentes haben wir uns folgende Fragen gestellt.

(1) Werden die Schüler motivierter, wenn sie realitätsbezogene Aufgaben lösen sollen?

(2) Verbessert sich die Leistung der Schüler durch die Verwendung realitätsbezogener Aufgaben?

(3) Lohnt es sich den Mathematikunterricht in einer solchen Gruppen, deren Mitglieder sich nicht besonders für Mathematik interessieren, wirklichkeitsbezogen zu gestalten?

(4) Lohnt es sich Aufgaben mit Wirklichkeitsbezug in den Online-Unterricht einzubringen?

Antworten auf diese Fragen haben wir im Rahmen eines Unterrichtsexperiments gesucht, in dem eine Gruppe aus Elftklässlern des Reformierten Gymnasiums in Szentendre teilgenommen hat.

4. Umstände und Methoden des Experiments

Einer aus 14 Schülern bestehenden Gruppe wurde der Bereich Trigonometrie anhand realitätsbezogener Aufgaben gelehrt. Lehrkraft war Kornélia Ficzere, die in diesem Jahr ihr Lehrpraktikum absolvierte. Die Gruppe hatte vier Mathematikstunden pro Woche, eine Stunde war wegen des Fernunterrichts 35 Minuten lang. Wöchentlich fanden zwei Stunden online und zwei Stunden offline statt. Wir beschäftigten uns mit den Themenbereichen Winkelfunktionen, Vektorenrechnung, Skalarprodukt, Sinus-und Kosinussatz. Wir bauten wirklichkeitsbezogene Aufgaben in den Unterrichtsstoff mit ein. Die Stunden waren wie folgt aufgebaut: Nachdem die Schüler mit ihrer Lehrerin den neuen Lehrstoff besprochen hatten, bekamen sie einige abiturähnliche Aufgaben zum Üben. Danach sollten sie wirklichkeitsbezogene Aufgaben lösen. Außerdem haben die Schüler am Ende jedes Themengebiets jeweils ein Aufgabenblatt bekommen, das sie selbständig lösen mussten. So konnten wir einschätzen, ob sie den erlernten Stoff wirklich beherrschen. Jedes Arbeitsblatt beinhaltete zwei abiturähnliche Aufgaben, zwei relitätsbezogene Aufgaben und eine Fleißaufgabe. Die Fleißaufgabe war eine Aufgabe mit Wirklichkeitsbezug zum Vertiefen und Üben des erlernten Lehrstoffs. Der Sachverhalt einer solchen Aufgabe war komplexer, sodass die Schüler im Allgemeinen mehr überlegen mussten, um die Fleißaufgaben zu lösen. Ein Teil der realitätsbezogenen Aufgaben stammt aus dem ungarischen Kursbuch *Sokszínű matematika 11* [Vielseitige Mathematik 11] (Kosztolányi, Kovács, Pintér, Urbán, & Vincze, 2014) und aus dem Arbeitsbuch *Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 11-12* [Vielseitige Mathematik Aufgabensammlung 11-12] (Árki, Konfárné Nagy, Kovács, Trembeczki, & Urbán, 2019). Außerdem haben wir uns auch selbst einige Aufgaben ausgedacht. Der Unterricht fand online statt, sodass die Schüler die Aufgaben zuhause gelöst haben. Im Rahmen der Forschung haben wir die

Ergebnisse der Aufgaben, die die Schüler zu Hause gelöst haben, ausgewertet, nach Lösungsebenen sortiert und nach Fehlertypen gruppiert (siehe Tabellen 2–5). Zusätzlich haben wir den methodologischen Charakter des Online-Unterrichts analysiert (Kása, 2021). Außerdem haben wir nach der Forschung die Schüler befragt, wie sie den Unterricht erlebt haben.

Geisteswissenschaftliche Fächer	*Naturwissenschaftliche Fächer*
Englisch 3	Biologie 3
Deutsch 3	Erdkunde 2
Französisch 2	Mathematik 2
Ungarisch 4	Informatik 3
Geschichte 6	

Tabelle 1. Anzahl der Schüler, die das jeweilige Fach als Lieblingsfach angegeben haben (mehrere Nennungen möglich)

In Tabelle 1 ist erkennbar, wieviele Schüler das jeweilige Schulfach als Lieblingsfach gekennzeichnet haben. Jeder Schüler konnte mehrere Fächer angeben.

Das folgende Diagramm zeigt uns, wie die Schüler im Allgemeinen zum Fach Mathematik stehen.

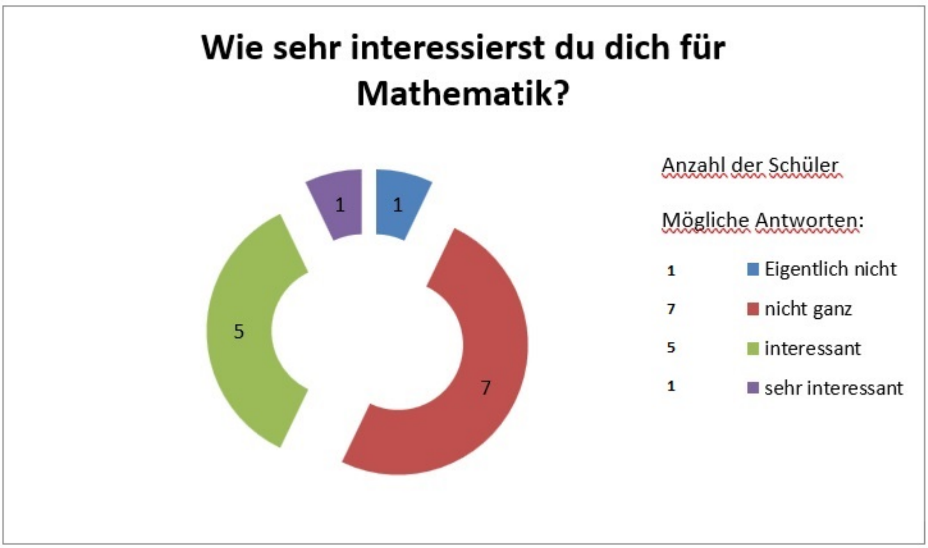

Abbildung 1. Umfrage: Interesse für Mathematik

An den vorhandenen Informationen ist leicht zu erkennen, dass sich der größere Teil der Gruppe nicht für naturwissenschaftliche Fächer interessiert, sondern eher für geisteswissenschaftliche Fächer. Dies sahen wir als eine besondere Herausforderung an, während unseres Experiments die Begeisterung für Mathematik bei den Schülern zu wecken.

5. Die Forschung

5.1. Vortest

Zu Beginn des Experimentes ließen wir die Schüler einen Vortest schreiben. Dessen Ergebnisse gelten als Ausgangspunkt unserer Forschung. Die Aufgaben des Vortests bezogen sich auf den Themenbereich der Trigonometrie, die die Schüler in der zehnten Klasse gelernt haben. In Bezug auf unsere Forschung waren vor allem die Aufgaben eins, drei und fünf von Bedeutung. In der ersten Aufgabe wurden Rechenoperationen mit Vektoren und die Länge eines Vektors abgefragt. Aufgabe drei und fünf waren Aufgaben mit Wirklichkeitsbezug. In der dritten Aufgabe musste die Sinusfunktion angewandt werden. Diese Aufgabe war eine Übung, die auch in mehreren Kursbüchern vorkommt, aber der Winkel war in Prozent angegeben. Die fünfte Aufgabe bestand aus einem längeren Text, aus dem die nötigen Informationen heraus gesucht werden mussten. Zum Lösen dieser Aufgabe benötigten die Schüler die trigonometrische Flächenformel. Aufgabentypen und die jeweiligen Ergebnisse der Schüler sind in Tabelle 2 zu sehen.

Anhand der Ergebnisse des Vortests konnten wir uns einen Überblick über das Wissen verschaffen, das die Schüler aus der zehnten Klasse mitgenommen hatten und wir bekamen einen Eindruck, inwiefern sie ihre trigonometrischen Kenntnisse bei realistischen Aufgaben anwenden können. Die erste Aufgabe wurde von den meisten Schülern gut gelöst, aber einige Schüler hatten Schwierigkeiten, Potenzen zu rechnen. Daraus schließen wir, dass die Schüler in den früheren Jahren die Operation der Potenzen nicht tiefgründig genug gelernt hatten. Fast alle Schüler haben die dritte Aufgabe verstanden und gut gelöst. Sie haben eine gute Abbildung angefertigt und sie haben mit der Sinusfunktion gerechnet. Allerdings haben nur fünf Schüler das richtige Ergebnis erhalten, da nur sie mit dem richtigen Winkelmaß gerechnet haben. Die anderen Schüler haben mit dem falschen Winkelwert gerechnet, weil sie den Winkel nicht von Prozent in Grad umrechnen konnten. Die fünfte Aufgabe wurde hingegen nur von zwei Schülern richtig gelöst. Die anderen konnten die Informationen aus dem Text nicht richtig

1. Aufgabe	Richtig	Fehler im Berechnen der Vektorenlänge	Keine Kenntnis der Vektorenlänge
Vektoren Vektorenlänge	65 %	21 %	14 %
2. Aufgabe	Richtig mit Herleitung	Richtig mit Taschenrechner	
Werte der Winkelfunktionen	79 %	21 %	
3. Aufgabe	Richtig	Fehler im Winkelgrad des Anstiegs	Keine Lösung
Bestimmung der Länge bei Kenntnis der Höche	36 %	43 %	21 %
4. Aufgabe	Richtig	Einen Schritt der Transformation nicht gemacht	Darstellung der Funktion falsch
Darstellung trigonometrischer Funktionen	72%	14%	14 %
5. Aufgabe	Richtig	Aufgabe falsch verstanden	Keine Lösung
Anwendung der trigonometrischen Flächenformel	14 %	7 %	79 %

Tabelle 2. Vortest: Ergebnisse

verarbeiten. Zusammenfassend können wir sagen, dass der größere Teil der Schüler sich nicht an Aufgaben mit langem Text herantraut. Trotz der Eigenschaft der Aufgabe, mit einem realistischen Hintergrund verbunden zu sein, können einige Schüler die Informationen aus einem langen Text nicht heraus arbeiten, ohne die Aufgabe misszuverstehen. Ein Grund hierfür kann sein, dass die meisten Schüler noch gar nicht oder nur wenig mit wirklichkeitsbezogenen Aufgaben in Berührung gekommen sind. Wir haben mit den Schülern besprochen, was eine wirklichkeitsbezogene Aufgabe ist. Elf Schüler berichteten uns, dass sie in den vorangegangenen Jahren nur selten mit solchen Aufgaben konfrontiert wurden. Diese Aufgaben sind für die Schüler komplizierter, denn sie müssen eigenständig über die Lösung nachdenken und können nicht durch algorithmisiertes Handeln zum Ergebnis kommen.

5.2. Das Skalarprodukt im Unterricht

Aufgrund der besonderen Themeneigenschaft hingen die Aufgaben mit Wirklichkeitsbezug im Bereich Skalarprodukt mit dem Lehrstoff der Physik zusammen. Hier können wir also auf den Zusammenhang von Mathematik mit anderen Schulfächern hinweisen. In Tabelle 3 sind die Ergebnisse der Aufgaben zusammen gefasst.

1. Aufgabe	Richtig	Falsch	Keine Lösung
Darstellung von Vektoren	21 %	71 %	7 %
2. Aufgabe	Richtig	Falsche Eigenschaften des Rhombus	Keine Lösung
Skalarprodukt orthogonaler Vektoren	36 %	50 %	14 %
3. Aufgabe	Richtig	Falscher Winkel	Keine Lösung
Kraftberechnung (Aufgabe mit Wirklichkeitsbezug)	21 %	71 %	7 %
4. Aufgabe	Richtig	Falscher Winkel	Keine Lösung
Arbeitsberechnung (Aufgabe mit Wirklichkeitsbezug)	36%	57%	7 %
5. Aufgabe	Richtig	Rechnung mit falschen Vektoren	Keine Lösung
Vektoren- und Arbeitsberechnung (Aufgabe mit Wirklichkeitsbezug)	43 %	50 %	7 %

Tabelle 3. Skalarprodukt: Ergebnisse

Die realistischen Aufgaben wurden anfangs von den meisten Schülern nicht richtig gelöst. Die Schüler haben die Aufgaben nicht gut verstanden und deshalb haben sie die falschen Daten und Informationen zum Berechnen verwendet. Die Abbildung 4 auf Seite 15 illustriert eine falsche Lösung der Aufgabe 3. Der Schüler rechnete mit dem Winkel, der im Aufgabentext angegeben war, ohne zu bedenken, dass zur richtigen Lösung der Winkel zwischen dem Kraftvektor und dem Bewegungsvektor benötigt wird. Dieser Winkel ist nicht der im Text gegebene Winkel sondern dessen Ergänzungswinkel zu 90°. Viele Schüler machten ähnliche Fehler in den Aufgaben 4 und 5. Wir versuchten dieses Problem zu lösen, indem wir mehr Illustrationen und Abbildungen in den Unterricht mit einfließen ließen. Mit dieser Methode haben wir Erfolg gehabt. Immer mehr Schüler haben den Text der Aufgaben gründlich gelesen und die richtigen Informationen heraus gearbeitet.

5.3. Erfahrungen bei der Lehre von Sinus- und Kosinussatz

Die folgende Tabellen 4 und 5 zeigen die Typen der Aufgaben und die Ergebnisse der Lösungen der Schülern in den Themengebieten Sinus- und Kosinussatz.

Als wir das Thema Sinussatz und danach das Thema Kosinussatz im Unterricht behandelt haben, konnten die Schüler die realistischen Übungen bereits erfolgreicher lösen. Unsere Erfahrung ist es, dass im Themenbereich Sinussatz die Schüler realistische Aufgaben besser lösen konnten als abiturähnliche Aufgaben (siehe Tabelle 4). Diese Erfahrungen beziehen sich hauptsächlich auf ein

Arbeitsblatt, das die Schüler am Ende des Themenbereiches selbständig lösen sollten.

1. Aufgabe	Richtig	Fehler beim Umstellen der Gleichung	Falscher Winkel ggb. Sinuswert	Falsche Umrechnung Winkelminute – Grad	Keine Lösung
Berechnen einer Seite	79 %	21 %	–	–	–
2. Aufgabe					
Berechnen eines Winkels	57 %	29 %	14 %	–	–
3. Aufgabe					
Berechnen eines Winkels (Aufgabe mit Wirklichkeitsbezug)	65 %	7 %	7 %	14 %	7 %
4. Aufgabe					
Berechnen einer Seite (Aufgabe mit Wirklichkeitsbezug)	86%	7%	–	–	7 %
5. Fleißaufgabe					
Berechnen einer Seite (Aufgabe mit Wirklichkeitsbezug)	57 %	–	–	–	43 %

Tabelle 4. Sinussatz: Ergebnisse

1. Aufgabe	Richtig	Fehler beim Umstellen der Gleichung	Falscher Winkel ggb. Kosinuswert	Aufgabe falsch verstanden	Keine Lösung
Berechnen eines Winkels	72 %	21 %	7 %	–	–
2. Aufgabe					
Berechnen einer Seite	58 %	21 %	–	21 %	–
3. Aufgabe					
Berechnen einer Seite (Aufgabe mit Wirklichkeitsbezug)	64 %	29 %	–	–	7 %
4. Aufgabe					
Berechnen einer Seite (Aufgabe mit Wirklichkeitsbezug)	72 %	14 %	–	7 %	7 %
5. Fleißaufgabe					
Berechnen einer Seite und eines Winkels (Aufgabe mit Wirklichkeitsbezug)	50 %	–	–	–	50 %

Tabelle 5. Kosinussatz: Ergebnisse

Die Schüler haben die Aufgabentexte gut verstanden und die richtigen Informationen heraus gearbeitet. So konnten sie mit den richtigen Daten und Werten rechnen. Die meisten Fehler machten die Schüler bei der Umstellung der Gleichungen. Wir versuchten zwar, diesen Mangel an Vorkenntnissen auszugleichen, dies ist uns aber nicht vollständig gelungen. Es ist schwer, bei den Schülern einmal falsch eingebettete Mechanismen zu korrigieren.

Außerdem haben die Schüler solche Aufgaben, in denen die Länge einer Seite eines Dreiecks bestimmt werden sollte, erfolgreicher gelöst. Wenn die Aufgabe nach einem fehlenden Winkel gefragt hat, war ein weiteres Problem der Schüler, dass sie von der Sinuswert oder Kosinuswert des Winkels den Winkel nicht richtig bestimmen konnten. Dieses Problem konnten wir während unserer Unterrichtsstunden leider nicht vollständig aus der Welt räumen.

Zusammenfassend haben wir fest gestellt, dass das Erlernen des Kosinussatzes den Schülern schwerer fiel als das Erlernen des Sinussatzes. Wir haben hierzu die Schüler befragt. Auf unsere Frage antworteten die Schüler, dass sie den Sinussatz besser verstanden haben, weil dieser einer Relation ähneln würde.

5.4. Ergebnisse der Klausuren

In Tabelle 6 ist die Notenverteilung von insgesamt drei Klausuren auf dem Gebiet der Trigonometrie zu sehen. Zwei Klausuren schrieben die Schüler in der 11. Klasse und eine Klausur in der 10. Klasse. Das Ergebnis der Klausur aus der 10. Klasse haben wir ausdrücklich zu Informationszwecken hinzu genommen. Die erste Klausur in Klasse 11 behandelte die Themen Vektoroperationen, Skalarprodukt, sowie Sinus- und Kosinussatz. Aufgaben mit Wirklichkeitsbezug wurden im Bereich Sinus- und Kosinussatz verwendet. Nach der ersten Klausur wurde das Thema der trigonometrischen Gleichungen behandelt. Auch in diesem Thema mussten die Schüler eine Arbeit schreiben. Da wir allerdings in diesen Bereich des Lehrstoffes keine realistischen Aufgaben mit einbezogen haben, beschäftigten wir uns auch nicht mit dem Ergebnis dieses Tests. Kurz nach diesem Test schrieben die Schüler eine zweite Klausur. Zeitlich gesehen fand die zweite Klausur einen Monat nach der ersten Klausur statt. Wir betteten zwei realistische Aufgaben mit in die zweite Klausur ein. Eine realistische Aufgabe behandelte das Skalarprodukt. Hier mussten die Schüler besonders darauf achten, nicht mechanisch die Daten aus dem Text zu verwenden (siehe Abbildung 5).

Die andere realistische Aufgabe behandelte den Sinus- und Kosinussatz. Im ersten Teil der Aufgabe musste der Kosinussatz angewandt werden und mithilfe dieses Satzes sollte die Länge einer Seite bestimmt werden. In den anderen Teilen der Aufgabe konnten die Schüler frei wählen, welchen Satz sie anwenden möchten. In diesen Teilen der Aufgabe zur Winkelbestimmung wandten die Schüler lieber den Sinussatz an, aber leider nicht immer richtig. Zur Seitenbestimmung haben fast alle Schüler problemlos mit dem Sinussatz gerechnet. Dadurch, dass die Schüler frei zwischen Sinus- und Kosinussatz wählen konnten, konnten wir fest stellen, dass sie lieber den Sinussatz wählen.

Klausur	Ungenügend (1)	Genügend (2)	Befriedigend (3)	Gut (4)	Sehr gut (5)	Durchschnitt
Trigonometrie 10. Klasse	2	2	4	3	3	3,21
Trigonometrie 11. Klasse: Erste Klausur	0	4	2	2	6	3,71
Trigonometrie 11. Klasse: Zweite Klausur	1	3	4	3	3	3,29

Tabelle 6. Notenverteilung und Durchschnitte der Klausuren

6. Ergebnisse und Auswertung

Während des Unterrichtsexperiments haben wir darauf geachtet, dass wir alle drei Motivationsmittel von Hans Freudenthal anwenden.

Während des Online-Unterrichts konnte die Lehrperson den Schülern weniger Hilfe leisten als im Präsenzunterricht. Außerdem fanden wöchentlich zwei Stunden offline statt. Deshalb mussten die Schüler wesentlich selbständiger arbeiten und sich einen Teil des Lehrstoffs selbst erarbeiten. Sie sollten neue Begriffe unter der Aufsicht der Lehrperson lernen und diese mithilfe der Übungsaufgaben allein vertiefen. Dadurch hatten sie meistens ein Erfolgserlebnis. In den Stunden, die online statt fanden, versuchte die Lehrperson nur die Gedanken der Schüler zu lenken, ohne eine konkrete Lösung zu verraten. Hinzukommt, dass die Schüler ein Ziel vor Augen hatten. Sie wollten ein erfolgreiches Abitur in Mathematik ablegen. Dieses Ziel haben nicht wir gesetzt, sondern die Gruppe hat dieses Ziel selbst gewählt. Wir haben versucht, die Gruppe zu unterstützen, indem wir abiturähnliche Aufgaben in den Unterricht mit einbezogen haben. So waren die Schüler viel motivierter, als wenn wir ihnen ein Ziel vorgegeben hätten. Außerdem versuchten wir das Lehrmaterial und die Illustrationen so zu verwenden, dass wir dadurch am besten alle Informationen vermitteln können. Wir haben solche Bilder und Abbildungen in den Unterricht eingebaut, die sowohl informativ sind als auch von den Schülern aktiv beim Lösen von Aufgaben verwendet werden konnten.

Wir versuchten diese Illustrationen so einzubetten, dass sie auch das Interesse der Gruppe wecken. Mithilfe dieser Unterrichtmethoden konnten wir einen Erfolg erreichen, was die Leistung und die Motivation der Schüler betrifft. Nun können wir unsere Forschungsfragen beantworten.

(1) *Werden die Schüler motivierter, wenn sie realitätsbezogene Aufgaben lösen sollen?*

Die Schüler gewannen während unseres Experiments zunehmend an Motivation, Mathematikaufgaben zu lösen.

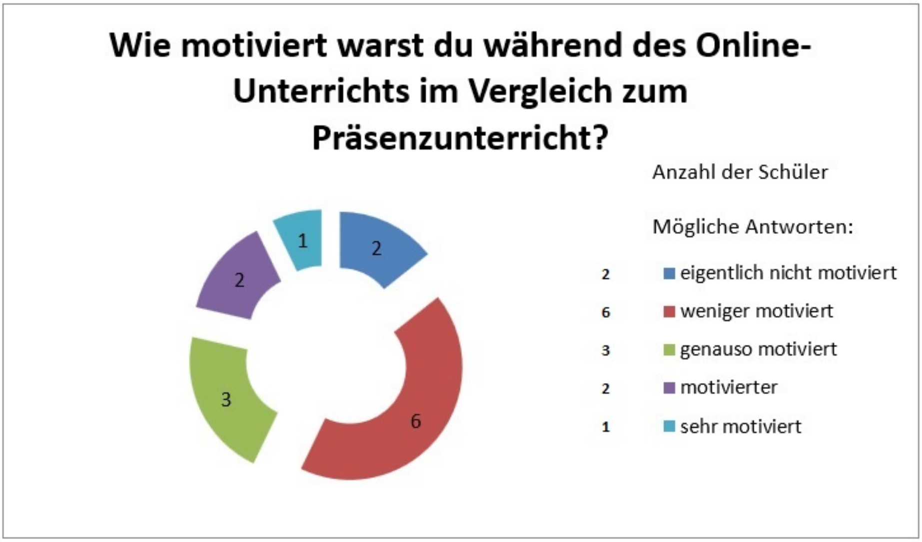

Abbildung 2. Umfrage: Motivation der Schüler während des Onlineunterrichts im Vergleich zur Motivation im Präsenzunterricht

Zum Einen haben immer mehr Schüler aktiv in den Stunden gearbeitet, zum Anderen haben sie regelmäßig die Hausaufgaben gelöst und ihre Lösungen im Unterricht präsentiert. Außerdem haben viele Schüler die Fleißaufgaben gelöst. Zusätzlich haben wir den Schülern eine Frage über ihre Motivation gestellt, welche sehr positiv beantwortet wurde. Obwohl mehr als die Hälfte der Gruppe meinte, dass während des Online-Unterrichts ihre Motivation gesunken sei, haben alle behauptet, dass durch die realitätsbezogenen Aufgaben im Unterricht ihre Motivation wieder stieg. Die Schüler fühlten sich motivierter, als sie Aufgaben lösen sollten, denen Situationen aus dem Alltag zugrunde lagen.

Abbildung 3. Umfrage: Motivation der Schüler beim Lösen realitätsbezogener Aufgaben

(2) *Verbessert sich die Leistung der Schüler durch die Verwendung realitätsbezogener Aufgaben?*

Bei der Hälfte der Gruppe konnten wir eine positive Entwicklung beobachten. Einerseits beobachteten wir zum Ende des Experiments wesentliche Verbesserungen beim Bestimmen des Winkels anhand von Sinus- und Kosinuswerten und beim Umstellen von Gleichungen. Andererseits, diejenigen Schüler, die anfangs Schwierigkeiten hatten, Daten aus einem Text richtig heraus zu arbeiten, haben dies während des Unterrichts gelernt und dieses Wissen in der zweiten Klausur richtig angewendet. In der Abbildung 4 sehen wir zum Beispiel die Lösung einer realistischen Aufgabe aus dem Arbeitsblatt des Skalarprodukts von einem Schüler. Der Schüler konnte den Aufgabentext dieser Aufgabe nicht präzise verstehen und daher auch die Aufgabe nicht richtig lösen.

Hingegen konnte derselbe Schüler in der zweiten Klausur die wirklichkeitsbezogene Aufgabe in Abbildung 5 problemlos und komplett richtig lösen. Hierbei müssen wir bedenken, dass dieser Aufgabentyp in den Wochen vor der zweiten Klausur nicht mehr im Unterricht geübt wurde. Außerdem konnten diejenigen Schüler, die beim Vortest keinen Mut hatten eine realistische Aufgabe zu lösen, in der zweiten Klausur alle erforderlichen Informationen richtig einsetzen.

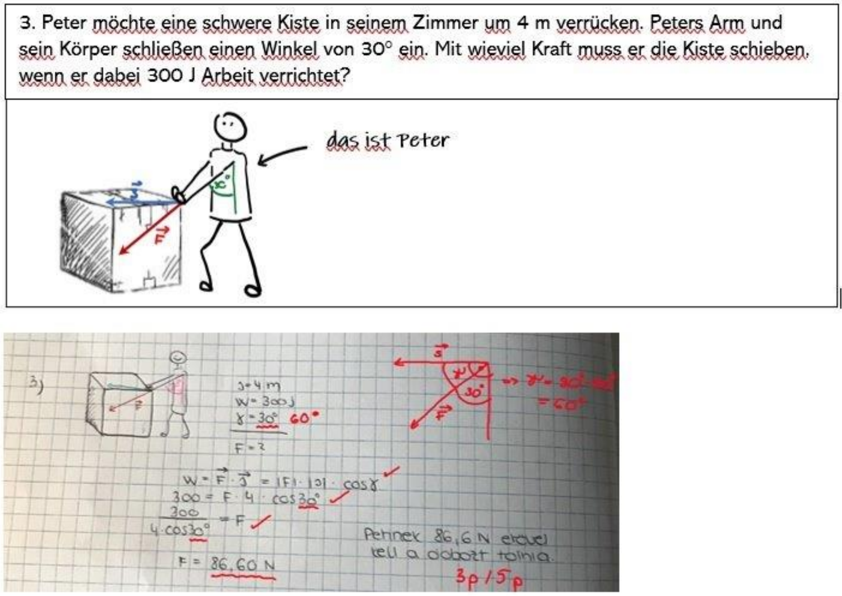

Abbildung 4. Aufgabe zur Kraftbestimmung mit falscher Lösung

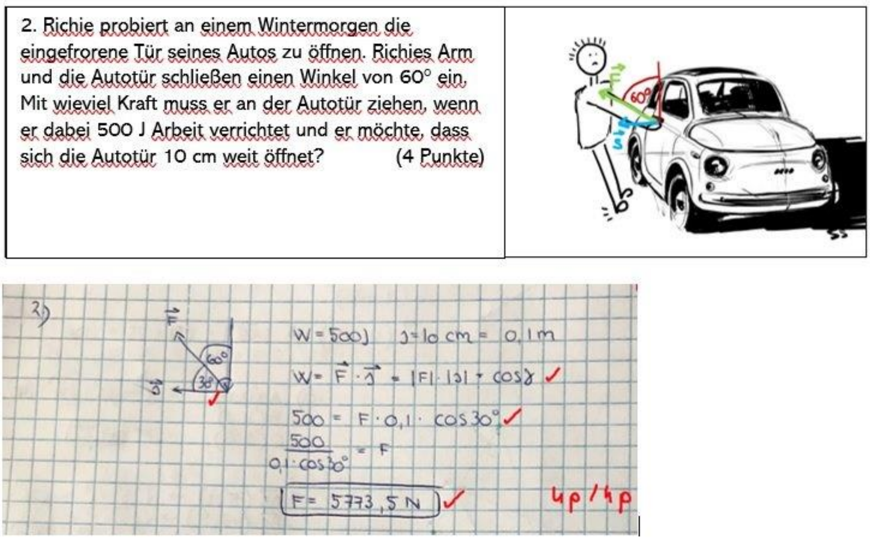

Abbildung 5. Aufgabe zur Kraftbestimmung mit richtiger Lösung

(3) *Lohnt es sich den Mathematikunterricht in einer solchen Gruppen, deren Mitglieder sich nicht besonders für Mathematik interessieren, wirklichkeitsbezogen zu gestalten?*

Ja. Einerseits haben sich Leistung und Motivation der Schüler durch die Anwendung wirklichkeitsbezogener Aufgaben wesentlich gesteigert. Andererseits denken die meisten Schüler nach der Durchführung unseres Experiments, dass sie den gelernten Lehrstoff im realen Leben anwenden können werden. Aber wir müssen darauf achten, dass diese Aufgaben nur dann eingeführt werden dürfen, wenn die Schüler die Formeln und Definitionen bereits mit Sicherheit beherrschen und sie über die erforderlichen Vorkenntnisse verfügen. Andererseits kann auch mit der praxisorientierten Methode das gewünschte Ergebnis nicht erzielt werden. Wir haben außerdem die Erfahrung gemacht, dass auch Aufgaben mit Wirklichkeitsbezug auf den ersten Blick nicht zu kompliziert aussehen dürfen, da sonst die Schüler schnell ihre Motivation verlieren. Wir müssen versuchen einfache und interessante Illustrationen in den Unterricht mit einzubinden, um das Interesse der Schüler zu wecken.

Abbildung 6. Umfrage: Meinungen der Schüler über die Anwendbarkeit der erworbenen Kenntnisse

(4) *Lohnt es sich Aufgaben mit Wirklichkeitsbezug in den Online-Unterricht einzubringen?*

Wir können auch im Rahmen des Online-Unterrichts Aufgaben mit Wirklichkeitsbezug erfolgreich anwenden. Allerdings ist es online schwieriger die Aufmerksamkeit der Schüler zu gewinnen als im Präsenzunterricht. Wenn die Unterrichtsstunden allerdings regelmäßig statt finden, dann können wirklichkeisbezogene Aufgaben in den Unterricht integriert werden. Mithilfe interessanter Aufgaben und aussagekräftigen Illustrationen können wir auch im Online-Unterricht Erfolg haben. Wenn wir die Ergebnisse betrachten, müssen wir uns auch vor Augen führen, dass sich die Schüler während des Online-Unterrichts mehr gegenseitig helfen konnten oder auch Hilfe von anderen Personen bekommen haben können als das normalerweise im Präsenzunterricht der Fall ist. Diese Gefahr der Verzerrung konnten wir aber reduzieren, indem wir auch den Lösungsweg für jede einzelne Aufgabe analysiert haben.

7. Zusammenfassung und Grenzen des Experiments

Zusammenfassend können wir sagen, dass wir in dieser Gruppe unser Ziel erreicht haben, das wir uns zu Beginn des Experiments selbst gesteckt hatten. Wir konnten den Schülern aufzeigen, wie wichtig Mathematik ist. Die Schüler wiederum haben bemerkt, dass es sich lohnt Mathematik zu lernen, weil sie das erworbene Wissen im realen Leben anwenden können. Andererseits konnten wir im Online-Unterricht nicht zweifelsfrei verfolgen, ob alle Schüler die Aufgaben selbständig gelöst haben. Besonders bei der Fleißarbeit ist diese Unsicherheit unsererseits gegeben, da die Schüler ihre Lösungwege nur digital zu senden brauchten und während ihrer Arbeitszeit die Kameras ausgeschaltet waren. Dies wäre anders gewesen, wenn die Schüler zwar allein, aber unter Aufsicht im Klassenzimmer die Aufgaben gelöst hätten.

Literatur

Ambrus, G. (2018). Egy nyitott, valós szituáción alapuló feladat variációi és lehetőségei az oktatásban és a didaktikai kutatásban [Open reality based tasks and their variations in the teaching and in the didactical research of mathematics]. *Gyermeknevelés Tudományos Folyóirat*, *6*(1), 55–65. doi: 10.31074/gyn201815565

Ambrus, G., Kónya, E. H., Kovács, Z., Szitányi, J., & Csíkos, Cs. (2019). A cross-sectional analysis of students' answers to a realistic word problem from grade 2 to 10. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *14*(3), 513–521. doi: 10.29333/iejme/5753

Árki, T., Konfárné Nagy, K., Kovács, I., Trembeczki, Cs., & Urbán, J. (2019). *Sokszínű matematika feladatgyűjtemény, 11-12. osztály* [Vielseitige Mathematik Aufgabensammlung 11-12]. Mozaik Kiadó.

Csíkos, Cs., & Verschaffel, L. (2011). A matematikai műveltség és a matematikatudás alkalmazása [Anwendung der mathematischen Kultur und des mathematischen Wissens]. In B. Csapó & M. Szendrei (Eds.), *Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez* [Inhaltsrahmen zur diagnostischen Bewertung der Mathematik] (pp. 59–97). Nemzeti Tankönyvkiadó.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Springer Dordrecht. doi: 10.1007/978-94-010-2903-2

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing. Preface to a science of mathematical education.* Springer Dordrecht. doi: 10.1007/0-306-47234-1

Kása, E. (2021). A realisztikus szemléletű feladatok aktív bevezetése a matematika órai tananyagba a trigonometria témakörén belül [Die aktive Einführung der wirklichkeitbezogenen Aufgaben in den Unterrichtstoff Mathematik im Bereich Trigonometrie]. In S. Ónodi & J. F. Papp (Eds.), *A mi tendenciáink* [Unsere Tendenzen] (pp. 37–59). Debreceni Egyetem Hatvani István Szakkollégium.

Kosztolányi, J., Kovács, I., Pintér, K., Urbán, J., & Vincze, I. (2014). *Sokszínű matematika 11* [Vielseitige Mathematik 11]. Mozaik Kiadó.

Lübbert, T. (2017). *"Nacherfinden" nach Hans Freudenthal vs. "Entdeckendes Lernen" nach Heinrich Winand Winter. Zwei Konzepte der Mathematikdidaktik im Vergleich.* GRIN Verlag.

Treffers, A. (2012). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics instruction – The Wiskobas Project,* Mathematics Education Library (Vol. 3). Springer. doi: 10.1007/978-94-009-3707-9

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2020). Realistic mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 713–717). doi: 10.1007/978-94-007-4978-8

Várady, F. (2017). *Probleme und Entwicklungsmöglichkeiten im Mathematikunterricht der Mittelschule beim Thema exponentielle und logarithmische Funktionen.* [Unpublished PhD thesis]. Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences, University of Debrecen.

KORNÉLIA FICZERE
DOCTORAL SCHOOL OF MATHEMATICAL AND COMPUTATIONAL SCIENCES
INSTITUTE OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF DEBRECEN
P.O.BOX 400, H-4002 DEBRECEN, HUNGARY

E-mail: ficzerelia@gmail.com

ÁGOTA FIGULA
INSTITUTE OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF DEBRECEN
P.O.BOX 400, H-4002 DEBRECEN, HUNGARY

E-mail: figula@science.unideb.hu

CAROLIN HANNUSCH
FACULTY OF INFORMATICS, UNIVERSITY OF DEBRECEN
P.O.BOX 400, H-4002 DEBRECEN, HUNGARY

E-mail: hannusch.carolin@inf.unideb.hu

EMESE KÁSA
INSTITUTE OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF DEBRECEN
P.O.BOX 400, H-4002 DEBRECEN, HUNGARY

E-mail: kasamesi@gmail.com

(Received February, 2022)