19/1 (2021), 57–76
DOI: 10.5485/TMCS.2021.0520
tmcs@science.unideb.hu
http://tmcs.math.unideb.hu

Teaching Mathematics and Computer Science

Wichtige Momente aus der ungarischen Geschichte des Analysisunterrichts

Ödön Vancsó und Hana Burian

Abstract. Törner et al. (2014) paper gives an outstanding review about teaching analysis at high school level in (Western) Europe. We tried to extend this paper with some results from the Hungarian Math History (Beke and Rátz 1897-1924, after second World War 1949-1960, the current situation–first of all based on schoolbooks, and we also included an experiment from 1984-1989 by E. Deák, which was interrupted and partially forgotten). In summary, this paper deals with the turning points of the brief history of teaching secondary school analysis in the XXth century in Hungary, including some conclusions at the end.

Key words and phrases: Teaching High School Analysis, History of Didactics of Analysis, Function, Limes, Derivate, Modelling, Meraner-Reform, New Maths, and Post New Maths.

MSC Subject Classification: 97A30, 97C30, 97D30, 97E50, 97I20, 97I40, 97U20.

Analysis Unterricht in (West-)Europe

Der Anfang des Schulunterrichts in Analysis erstreckt sich in Europa und anderswo auf der Welt bis zum Beginn des XX. Jahrhunderts zurück. Die Einführung des neuen Themas erfolgte aufgrund der damaligen internationalen Reformbemühungen im Mathematikunterricht. Eine Zentralfigur dieser Bewegung, der *Meraner Reform* und der Erneuerung des Mathematikunterrichts, war Felix Klein, ein berühmter Mathematiker und Pädagoge an der Universität Göttingen (Ambrus, Filler, & Vancsó, 2017; Ambrus, 2019). Die Zielsetzung dieser Reform war einerseits den Inhalt des Gimnasialunterrichtes dem Zeitgeist entsprechend zu transformieren und zu erweitern, andererseits sollte der Unterricht näher zur reellen Welt gebracht werden, also wurde mehr Gewicht auf die Erfahrungen der Schüler gesetzt.

Um die Harmonisierung der Reformen in ganz Europa zu erreichen, wurde in 1908 eine neue Organisation ICMI (Int. Commission on Mathematical Instructions) begründet. Der erste ICMI Präsident war Felix Klein selbst, der in der Gründung auch eine zentrale Rolle gespielt hat. Seine Tätigkeit hatte eine so große Auswirkung auf den Mathematikunterricht, dass einer der berühmtesten Preise auf dem Gebiet der Mathematik-Didaktik nach ihm (Felix Klein Preis) bennant wurde. In der Fachliteratur werden drei Hauptperioden des Analysisunterrichts unterschieden (Törner et al., 2014).

Die *erste Periode* dauerte von Anfang des XX. Jahrhunderts bis zur Mitte der sechziger Jahre. Hauptmerkmal dieser Periode ist, dass die Mathematiker (Z.B. H. Poincare, Borel und Hadamard in Frankreich, Klein in Deutschland, Vailati in Italien, Beke in Ungarn), sich vor allem dafür einsetzten um den Umbruch zwischen Schul- und Universitätsmathematik zu überbrücken.[1] Gleichzeitig war ein wichtiger Aspekt die Elemente der Differential und Integralrechnung auf der Grundlage der geometrischen und mechanischen Erfahrungen einzuführen, und erst danach zunehmend zu abstrahieren: „Alle Aussage soll recht sein, aber muss nicht sofort die ganze Wahrheit bekannt zu machen." (zitiert von Poincare, Artigue (2000, s. 7.)). „At this period of time, calculus teaching at the lyceum level in France supported a pragmatic and algebraic approach." (Artigue, 2000). Diese Zeit wird während der gesamten Periode dadurch charakterisiert, dass fast ausschließlich Mathematiker über die Schulmathematik diskutierten.

Die *zweite Periode* begann schon in den fünfziger Jahren (ein paar Jahre Überdeckung mit der ersten Periode, zwischen diesen Perioden gibt es keine genaue zeitliche Grenze) und dauerte bis zur Mitte der siebziger Jahre oder in einigen Ländern noch länger. Hauptmerkmal der zweiten Periode ist, dass ein Erneuerungsprozess wieder von der Seite der Mathematiker begonnen hat, die den Inhalt der gymnasialen Mathematik im Geist der modernen Mathematik verändern wollten. Diese Reform ist als „New Maths" Bewegung in die Geschichte eingegangen[2]. Zentralfiguren waren die Mitglieder der Bourbaki Gruppe, die zu

[1] Es ist hochinteressant, dass dieses Ziel bis zum heutigen Tag immer wieder vorkommt.

[2] New Math wird auch als eine Auswirkung des Sputnik-Schocks angesehen. Siehe zu New Maths noch die folgende an Web:
`http://math.unipa.it/~grim/EGjone5.PDF`;
`https://medium.com/age-of-awareness/what-happened-to-new-math-eeb8522fc695`

dieser Zeit stark von der Entwicklung algebraischer Strukturen beeinflusst waren. In diesem Sinne hielten sie deshalb die gymnasiale Mathematik für veraltet und nicht präzise genug. In dieser Zeit wurde daher versucht, den Mathematikunterricht der Sekundarstufe so nah wie möglich an der akademischen Mathematik des XX. Jahrhunderts zu orientieren, d.h. in allen Bereichen der gelehrten Mathematik waren genaue Definitionen, Theoreme und Beweise erforderlich. Die Bestrebung zur Präzision hatte besonders große Auswirkung auf den Analysis Unterricht in Gymnasien. Zu dieser Zeit begann die Verschiebung der Betonung von der anschaulichen Einführung der Begriffe zu deren formaler Darstellung und erschienen in der Schule die „Epsilon-delta“ Formalismen, die präzise Definition des Konvergenzbegriffs mit mehr Quantoren und die formallogischen Beweise der darauf aufbauenden Theoreme. Es ist wichtig zu bemerken, dass diese Veränderung in verschiedenen europäischen Länder nicht gleichwertig betont war, z. B. in Frankreich viel stärker als in England. Beginnend in den achtziger Jahren wurde die Präzision und das Abstraktionsniveau der „New Math“ in dem gymnasialen Mathematikunterricht allmählich reduziert.

Die Auswirkung dessen in der *dritten Periode* (Post New Maths) dauert vom Mitte der Siebziger bis zum heutigen Tag, die Erforschung des Mathematikunterrichts erhielt mehr Aufmerksamkeit als zuvor. Die Mathematikdidaktik als selbstständige Wissenschaftsgebiet wurde allmählich auch von Mathematikern anerkannt. Die Ergebnisse der Forschung wurden bei der Ausarbeitung des Lehrinhalts, Lehrplans des Schulunterrichtes so auch bei dem Analysisunterricht von Schritt zu Schritt mehr berücksichtigt. Bezüglich der Entwicklung des Analysisunterrichts wurden international verschiedene Vorschläge unterbreitet, Grundbegriffe und deren Beziehungen verständnisorientiert zu vermitteln, aber bis heutigen Tag wurde kein solches Konzept entwickelt, das allgemein akzeptiert würde. Das zeigt auch die relativ wenigen Schulexperimente über Analysisunterricht (siehe einen Überblick Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm, and Weigand (2016)). Der Grund ist wahrscheinlich, dass Lernen und Lehren von Analysis sehr komplex sind (Dennis & Confrey, 1995). Es gibt zwei Strömungen dieser Vorstellungen.

Die Mehrheit der Didaktiker nähert sich von der Seite der didaktischen Theorien zum Problem. In diesem Fall stützt didaktischer Forscher die Effizienz vorgeschlagener Unterrichtskonzepte durch didaktische Theorie. Diese Forschungen versuchen den Schülern beim Übergang von anschaulichen Vorstellungen zu exakten Wissen zu helfen. In diesem Prozess spielen auch Medien eine Rolle. Viele Studien bieten solche Lehren Methoden an, die vor allem durch epistemologischen und theoretischen Argumenten begründet (s. die Artikel Gravemeijer and Doorman (1999); Mamona-Downs (2001); Przenioslo (2005); Tall (2009); in Törner et al. (2014) behandelten). In Bezug auf diese Art von Studien beziehen sich die vorgeschlagenen Unterrichtsansätze auf die Verwendung speziell gestalteter Aufgaben, die die Schwierigkeiten der Schüler berücksichtigen, die Modellierung authentischer Situationen sowie die Verwendung informeller Beispiele auf der Grundlage visueller Darstellungen als Ausgangspunkt für Weitergabe an formale Definitionen und Eigenschaften.

Die andere Gruppe der Didaktiker erproben ausgearbeitete Konzepte in der Schule und prüfen die Effizienz der Konzepte mit der Analyse der Ergebnisse, aber solche Forschung nicht oft vorkommen. Z.B. Biza (2011); Hauchart and Schneider (1996); Hoffkamp (2011) berichteten über solche experimentellen Studien.

Obwohl es kein einheitliches Konzept für einen effektiven Analysisunterrichts gibt, scheinen sich die Forscher heute einig zu sein, dass ein intuitives, illustratives Wissen zuerst von den Schülern entwickelt und dann schrittweise in den Unterricht formaler Konzepte überführt werden müsste. IT, Modellierung und die Verwendung unterschiedlicher Darstellungen spielen in diesem Prozess eine wichtige Rolle (Artigue, 2005; Tall, 2011). Die oben bekannten Beispiele zeigten, dass in den untersuchten europäischen Schulklassen immer noch die Entwicklung von prozeduralen Wissen dominiert, obwohl die Auswahl nicht verallgemeinerungsfähig ist. (Törner et al., 2014)

Die Geschichte des Analysis Unterrichtes in Ungarn

Der Analysisunterricht hat eine fast hundertjährige Geschichte in Ungarn. M. Beke verbrachte ein Jahr (1982/83) mit einem staatlichen Stipendium in Göttingen folgend der Einladung von Klein, wobei er aus der Nähe die Arbeit von Klein über die Veränderung der Schulmathematik bemerken konnte. Kleins Ideen hatten einen großen Einfluss auf ihn, der nach der Rückkehr ein Initiator an der Spitze der ungarischen schulmathematischen Reform wurde. (Ambrus, 2019)

Die Reformbemühungen erforderten, dass der Mathematikunterricht die Bedürfnisse des praktischen Lebens stärker berücksichtigt und andererseits den Schülern allgemeine Methoden zum Verständnis natürlicher Phänomene und zur Lösung der damit verbundenen Probleme zeigt. Beke hat dies folgendermaßen formuliert (Beke, 1906): „*... den praktischen Unterricht in Mathematik auf der Grundlage von Erfahrungen, die in organischem Zusammenhang mit dem naturwissenschaftlichen Unterricht stehen ... Ziel all dieser Verhandlungen ist es,* *Innovatoren dem modernen sozialen Leben, insbesondere den Bedingungen des Wirtschaftslebens, näher zu bringen, und dieses Material so zu erweitern, dass die mathematischen Grundformen des zunehmend dominanten wissenschaftlichen Denkens ins öffentliche Bewusstsein gebracht werden."* Für Beke war die Grundlage des wissenschaftlichen Denkens die Untersuchung der Beziehungen zwischen Größen-Beziehungen die durch Funktionen beschrieben werden. Er betrachtete als das wichtigste Ziel des damaligen (modernen) Mathematikunterrichts, auch auf der Sekundarstufe, eine eingehende Beschreibung des Funktionsbegriffs. Ein wichtiger Teil davon war für ihn die gründliche Kenntnis der grafischen Darstellung von Funktionen und die Einführung von Elementen der Differential- und Integralrechnung in die Sekundarschule (Beke, 1909). Daher ist es nicht verwunderlich, dass Beke die Einführung eines neuen Lehrplans in Ungarn forderte, was auch in seinem Vortrag auf der Generalversammlung des Nationalen Lehrerverbandes der Sekundarstufe 1906 zum Ausdruck kam: *„Damit ich mit voller pädagogischer Überzeugung sagen kann, dass die Elemente der Differential- und Integralrechnung unseren Mathematikunterricht einfacher, regelmäßiger und interessanter machen und die allgemeine Bildung, die mathematischen Einsichten und das wissenschaftliche Denken des Schülers verbessern würden."* (Beke, 1906). Beke hat einen Kurs „Einführung in die Differenzial- und Integralrechnung" in „freien Lycee" schon in 1896 und 1898, danach in der damaligen Volkshauptschule gehalten. Aus diesen Vorträgen entwickelte sich das erste ungarische Buch auf diesem Gebiet mit dem Titel *„Einführung in die Differenzial- und Integralrechnung"* (Beke & Scharnitzky, 1965). Rátz, ein hoch angesehener Mathematiklehrer, der so bekannte Wissenschaftler wie János (John von) Neumann und Jenő (Eugen) Wigner unterrichtete, unterstützte die neuartigen Ideen ebenfalls. Ähnlich wie Beke, hat auch Rátz gedacht, dass *„diese Reformbestrebungen erfordern einerseits eine stärkere Berücksichtigung der Bedürfnisse des praktischen Lebens im Mathematikunterricht und andererseits die Bereitstellung allgemeiner Methoden zum Verständnis natürliche Phänomene und zur Erleichterung der Lösung der mit diesen Phänomenen verbundenen Probleme und Aufgaben. Die Bedürfnisse des praktischen Lebens erfordern daher die Kenntnis der Änderungen und Darstellungen von Funktionen, und ein echtes Verständnis dieser wird zu den ersten Elementen allgemeinerer Methoden führen, der Differential- und Integralrechnung."* (Rátz, 1909). Für ihn bilden die Funktionen das Herzstück des ganzen Mathematikunterrichts.

Es wäre interessant zu erwähnen, dass es auch Tamás Varga 60 Jahre später für sehr wichtig hielt, das richtige Funktionskonzept für Schüler zu entwickeln. Er sah dies als ein integratives Konzept, das die gesamte Mathematik miteinander

Abbildung 1. Gedächtnistafel auf der Schule Fasori-Gymnasium in Budapest 1996

verwebt und es den Schülern ermöglicht, gemeinsame oder verwandte Gedanken hinter einem anderen Erscheinungsbild zu enthüllen. (Varga, 1983). Er hat in einer Buchserie für die Sekundarstufe am Anfang der fünfziger Jahre mitgewirkt (Gallai et al., 1952). Diese Schulbücher haben sich *der originalen Idee von Klein* in der Schulpraxis am besten angenähert. Leider werden sie heute nicht mehr verwendet und sind nur in wenigen Antiquitätengeschäften oder größeren Schulbibliotheken zu finden. Im Geiste der Reform entwickelten Rátz und Mikola erst 1902 am damals berühmten *Fasori Evangelischen Gymnasium* die Methoden und den Lehrplan des Mathematikunterrichts ausführlich und schrieben später die entsprechenden Lehrbücher. Erst im November 1909 wurde die Form des Mathematikunterrichts, die sie im Einklang mit den Reformbemühungen entwickelt hatten, offiziell genehmigt und bereits experimentell in der Praxis eingesetzt. Da Differential- und Integralrechnung ein neuer Lehrinhalt in der Sekundarstufe war, entwickelten Rátz und Mikola einen Weg, dies zu lehren. Ihre Arbeit wurde an mehreren Stellen separat veröffentlicht: 1910 im Bulletin des Budapesters Evangelischen Gymnasiums (des schon erwähnten Fasori Gymnasiums) und im selben Jahr in Buchform sowie in einer erweiterten Ausgabe mit dem Titel *„Elemente von Funktionen und infinitesimale Berechnungen“* (Rátz & Mikola, 1914). Dieses Buch gilt als das *erste Analysis-Lehrbuch* für die Sekundarschulausbildung. Trotz der Initiativen von Beke und Rátz wurde die Differential- und Integralrechnung erst während der nationalen Bildungsreform, d.h. ab 1924, ein Teil des offiziellen Lehrplans, obwohl sie bereits 1916 in den Anhang in Bekes Lehrbuch (Beke, 1916) aufgenommen wurde. Mit diesem Schritt erfüllte der Mathematikunterricht in Ungarn die Anforderungen der Reform und legte mehr Wert auf die Kenntnisse der Funktion und ihres Änderungsverhaltens.

Nach dem Krieg wurde eine große Diskussion in den fünfziger, sechziger Jahren geführt ob die Analysis im Curriculum von Gymnasien bleibt. Der Unterricht wurde zwischen den zwei Weltkriegen auf diesem Gebiet sehr formal und mechanisch. Das führte zu der Idee, die Analysis besser erst an der Universität zu lehren. Es gab aber eine progressive Bewegung, von der T. Varga auch viel übernommen hatte, nämlich sollten die komplexen und deshalb mathematisch tieferen Gedanken auf einem langen Weg eingeführt werden. In diesem Thema bedeutet es, *die Grundelemente der Analysis* früher zu beginnen, so mehr Gewicht auf *die Ungleichungen* zu legen oder die Quantoren in einfacheren Gebieten zu gebrauchen. Eine andere Elementarisierung könnte die Funktionen im ersten Schritt in der Schule auf Polynome beschränken. So wurde z. B. in Westdeutschland intensiv über Lipschitz-Analysis nachgedacht (siehe z. B. Karcher (1973, 1976)), wobei ein strengerer Differenzierbarkeitsbegriff (der unter den Polynomfunktionen äquivalent mit der Cauchy-Differenzierbarkeit ist) definiert wurde. Dazu sollen nur Ungleichungen gebraucht und Quantoren vermieden werden. Diese Überlegungen beeinflussten auch Ervin Deák, um sein Konzept auszuarbeiten, siehe .

Analysisunterricht im Geist von Beke und Rátz

Nicht nur Beke, sondern auch Rátz vertrat den Standpunkt, dass der Inhalt des Mathematikunterrichts in Hinsicht auf die Anwendung in den Naturwissenschaften reformiert werden sollte. Er schrieb dazu (Rátz, 1909): *„Jeder gebildete Mensch, der in den Geist der Naturwissenschaften eindringen und ihre Prinzipien verstehen will, spürt immer den Mangel der mathematischen Ausbildung. ... Die mathematische Inhalte, die bisher an der Sekundarstufe unterrichtet wurden, reichen nur nicht aus, um das heutige Weltbild der Wissenschaft zu prägen, sondern haben auch nichts damit zu tun. ... Intakt ist daher unsere Überzeugung, dass die mathematischen Inhalte der Sekundarstufe auf die wichtigsten Abstraktionen der heutigen Weltanschauung der Wissenschaft zugeschnitten sein sollten. Es ist daher notwendig, dass einfache veranschaulichende Diskussionen über Funktionen, das Konzept des Grenzübergangs und Elemente von Berechnungen mit unendlich kleinen Größen in den Lehrplan der Sekundarstufe aufgenommen werden.“* Eben deshalb hat Rátz vorgeschlagen die Vorbereitung des Funktionsbegriffs schon in der *fünften Klasse* zu beginnen. In erster Reihe schlug er die Beobachtung von Beziehungen zwischen veränderlichen Größen, die aus dem Leben genommen sind und die Erstellung so vieler graphischen Darstellungen (z. B. Zeit und Temperatur, Niederschlag, Luftdruck) wie möglich vor. Für die *sechste* und die *siebte Klasse* schlug er dasselbe vor, d. h. Korrelationen zu beobachten und so viele und genaue

Graphen wie möglich zu erstellen. In der *achten* bzw. *neunten Klasse* machte er einen qualitativen Sprung, hier hielt er es für zweckmäßig, eine systematische Diskussion über die Änderung und Darstellung von Funktionen zu beginnen. Der Schwerpunkt lag jedoch weiterhin auf der Anschauung. „Wir beginnen nicht mit der genauen Definition, sondern mit geeigneten Beispielen, auf denen das Konzept der Funktion langsam aufgebaut wird.“ (Rátz, 1909). Zum Beispiel dachte er eine über geeignete Frage nach: „Wie rechnet man Grad R (Rankine-Grad) in Grad F (Grad Fahrenheit) um? Zuerst machen wir eine Tabelle, deren Mängel dazu führen, dass eine Zeichnung erforderlich ist.“ Es folgte eine Diskussion der linearen und quadratischen Funktionen. In *Klasse 10* wurden die logarithmischen und trigonometrischen Funktionen diskutiert, und erst hier wurde der Begriff der Funktion definiert. Für die *Klasse 11* schlug Rátz die Einführung des Konzepts des **D**ifferential**q**uotienten (später immer **DQ**) in Verbindung mit der Geometrie vor, d.h. der Koordinatengeometrie. Der Unterricht der Differentialrechnung bestand bei ihm aus folgenden Schritten:

(1) Einführung des DQ als Grenzposition der Sekanten, die Tangente.

(2) Demonstration anhand von Zeichnungen, dass der DQ nicht negativ (positiv) sein kann, in den Fällen, in denen y zunimmt (abnimmt), wenn x zunimmt (abnimmt).

(3) In allen Beispielen müssen auch die Funktion und ihre Ableitung (immer in dem gleichen Koordinatensystem) gezeichnet werden, um die Beziehung zwischen den Extremwerten der ursprünglichen Funktion und den Nullpositionen der Ableitungsfunktion zu beobachten.

(4) Die Bestimmung des DQ der einfachsten algebraischen und trigonometrischen Funktionen, bzw. Berechnung der Summe, des Produkts, der Potenz und des Bruchs von zwei Funktionen.

(5) Behandlung der Extremwerte von Funktionen und Einübung von deren Bestimmung im Falle von konkreten Aufgaben.

Beke und Rátz betonten, dass der wichtigste Aspekt in dem Analysisunterricht darin besteht, die Veranschaulichung mit allen verfügbaren Werkzeugen zu demonstrieren und so viele praktische Anwendungen wie möglich in den Bereichen des Wissens der Schüler aufzuzeigen. Die folgenden Zitate zeigen, wie Rátz diese betrachtete: *„Wir werden den DQ nur auf Grund der Anschauung einführen, wir werden abstrakte, theoretische Erklärungen vermeiden.“*

„Auf Grund unserer Zeichnungen wird gezeigt, dass der DQ nicht negative ist, wenn. . . “

„Vor allem werden solche Funktionen differenziert, die später in der Mathematik oder in der Physik gebraucht werden. Wir müssen sehr sorgfältig unsere Beispiele auswählen, um zu vermeiden, dass das Gedächtnis unserer Schüler von Formeln belastet wird, die im Gymnasium nicht nötig sind.“
„Der Schwerpunkt soll auf die möglichst vielseitigen Anwendungen des DQ anstatt auf die Technik der Differenzialrechnung gesetzt werden.“
„Der Grundlage unserer Diskussionen ist wieder die Anschauung. ... Extremwert kann nur dann vorkommen, wenn sich in diesem Punkt das Vorzeichen der Ableitung verändert. Diese Frage wird auch durch die Veranschaulichung beantwortet.“ (Rátz, 1909)

Diese Zitate weisen darauf hin, dass Rátz die Präzision auf der Sekundarstufe ablehnte. Die gleiche Meinung wurde von Beke geäußert, der erklärte (Beke, 1909): *„Unsere Methode sollte überall klar und praktisch sein. In unserer Diskussion vermeiden wir übermäßige Abstraktion und das Streben nach vollständiger Präzision, aber hier und da können wir auf außergewöhnliche Umstände hinweisen, die die Anwendbarkeit unserer Verfahren einschränken.“* Mikola entwickelte Lehrplan und Lehrmaterial für Analysis an Gymnasien auf Grundlage der Vorlesungen sowohl von Beke als auch von Rátz. Beispielweise enthält das Material weder eine genaue Definition des DQ noch das Epsilon-Delta-Kalkül oder einen anderen Formalismus. In dem Analysisbuch (Rátz & Mikola, 1914) erscheinen alle fünf oben erwähnten Punkte (Némethné, 2006). Die Einführung des DQ wird mit der Berechnung der Tangente einer konkreten quadratischen Funktion in einem gegebenen Punkt durchgeführt. Rátz arbeitete mit dem Symbol $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, dessen Wert in mehreren Punkten konkret berechnet wurde. Die Definition ist: der Ausdruck $\lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ wird DQ einer Funktion an einem bestimmten Punkt genannt. Für mehrere Funktionen werden die Ableitungsfunktion durch die Grenzwerte von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bestimmt. Danach wurden diese dargestellt und es werden Folgerungen auf die Eigenschaften der Funktion mit Hilfe der Ableitungsfunktion gezogen. Schließlich wird die Funktion selbst skizziert. Die Aussagen über das Monotonitätsverhalten bzw. die Extremwerte der ableitbaren Funktionen werden aus der gemeinsamen Darstellung der Funktion und ihrer Ableitung in einem Koordinatensystem gewonnen, d.h. auf veranschaulichende Weise. Die Additionsregel von den Ableitungsregeln gibt Rátz nach der Berechnung mehrerer geeigneten Funktionenbeispiele an. Er verwendet formale Beweise nur bei Multiplikation und Division, aber auch erst gegen Ende des Kapitels. Zuvor enthielt das Lehrbuch mehrere Beispiele für die Berechnung der Ableitungen einfacherer Funktionen, indem die Grenzwerte von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gebildet, die Extremwerte von Funktionen bestimmt und letztere in Textaufgaben angewendet wurden. In diesen Fällen wird jedoch auch nur die Ableitungsregel für die Addition verwendet. Die Regeln für Berechnung der Ableitung von zusammengesetzten Funktionen und ihre Anwendung werden erst im letzten Kapitel dieses Themenkreises erwähnt. Diese Struktur legt nahe, dass Rátz erst dann auf die algorithmische Verwendung von Ableitungsregeln umsteigen wollte, wenn die Schüler schon bereits ein „Bild“ vom Konzept der Ableitung hatten.

Ein neuer Konzepts Entwurf für Analysis Unterricht von Deák

Bevor wir zur heutigen Sekundarschulanalyse in Ungarn auf Grund von Lehrbüchern übergehen, werden wir versuchen, einige Materialien kurz zusammenzufassen, die einen grundsätzlichen Bezug zu dem Experiment von Ervin Deák in den 1980er Jahren aufweisen, d. h. an der Grenze der zweiten und dritten Epoche. Dieses Experiment wurde auf sehr originellen Prinzipien aufgebaut und hat nicht nur die fortschrittlichen Ideen der oben erwähnten großen Vorgänger (wie F. Klein, M. Beke usw.) tiefgreifend angewendet, sondern auch viel aus den Ergebnissen der Reformbewegung des Mathematikunterrichts in den Jahren nach dem Zweiten Weltkrieg und aus den Grundideen des komplexen Mathematikunterrichts von Varga[3]. Das Besondere ist das Verhältnis von Deáks Konzept zur Lipschitz-Analysis. Die zentrale Rolle spielt hierbei die lineare Approximation einer Funktion in einem Argument. Wir bewegen uns hier unter Polynomfunktionen, wollen aber das Lernen und das Cauchy-Differenzierbarkeit durch konzeptionelle Verstärkung erleichtern (was, obwohl mit einer Einschränkung des Anwendungsbereichs verbunden, eben der Grund ist, warum die Lipschitz-Analysis zu dieser Zeit meistens kritisiert wurde). Der Moderator bietet dem Lernenden einen langen, reichhaltigen Erkenntnisweg, der zum Differentialquotienten führt (Deák, 2004). Einige der Merkmale dieses Weges:

- Eine formale Definition ist nicht am Anfang eines Weges, sondern besser gegen dessen Ende zu finden.
- Der Schüler begegnet den begrifflichen Schwierigkeiten in viel feineren Phasen als gewöhnlich.

[3] siehe dazu unter anderem: Halmos and Varga (1978) oder Varga (1988)

- Die Prinzipien von „Problemorientiertheit“ und „Entdeckung“ werden weitgehend umgesetzt: der ganze Erkenntnisweg kann wie eine wahre Problemgeschichte besichtigt werden, die die angewöhnten Aufgaben und derer Lösungen der Fuktionsdiskussion folgen.
- Dies wird mit der Entdeckung von solchen algebraischen und geometrischen Begriffen, Mitteln und Methoden verflochten, die gewöhnlich nicht zum Analysisunterricht gehören. (Dabei setzt sich T. Vargas Prinzip der Einheit der Schulmathematik sehr stark durch. Dies gilt insbesondere für die tatsächliche methodische Umsetzung des von Surányi seit Jahrzehnten vertretenen Prinzips, dass eine der wesentlichen Voraussetzungen für den Analysisunterricht: tiefer, umfassender und gezielter Unterricht von Ungleichungen ist.
- Dieses Prinzip vermeidet die Dichotomie von Veranschaulichung und Präzision; „der lange Weg“ ermöglicht diese Konfrontation zu lösen. (Deák, 2004, 2010)

Das Konzept von Deák basiert konsequent auf Grundsätzen, die für einen begrenzten und auch einen umfassenden Inhaltsbereich gelten. Das Prinzip des „langen Wegs“ ist ein typisches Beispiel für Letzteres. Diese Experimente dauerten mehrere Jahre in einigen sogenannten „technischen, berufsbildenden“ Sekundarschulen (freiwillige Lehrer aus 80 Schulen, Lehrbuchreihe – das Material Differenzialrechnung in Band III und der methodische Leitfaden, Deák (1989) –, Fortbildungskurse für Lehrerin im ganzem Land, Konferenzen) unter der Aufsicht OPI (Staatliches Pädagogisches Institut). Nach den gesellschaftlichen Umbrüchen (1989) endete das Experiment wegen dem plötzlichen Ende von OPI.

Das Ziel des Experimentes war, positive Ergebnis zu bekommen eine Forschung zu unterstützen; und nicht im breiteren Kreis und sofort die allgemeine Einführung in die Schulen – wie bei Varga am Ende der 70er Jahre – (die wäre wegen seiner Neuheit bezüglich der Umstrukturierung des ganzen Mathematikunterrichts, der nötigen Lehrerweiterbildung in großem Masse usw. nicht möglich gewesen). Als ein spezielles Experiment wäre möglich heute auch fortzusetzen, um die Untersuchung der Wirkung des Analysisunterrichts und der Hintergrund dessen Problems hinausgehend diesem Konzept tiefer analysiert zu werden. S. noch .

Analysis in den heutigen Lehrbüchern in Ungarn

In diesem Abschnitt werden vier Lehrbücher, die heutzutage in Ungarn im Unterricht genutzt werden, kurz vorgestellt. Wie schon erwähnt, wird die Analysis im Gymnasium ausschließlich auf der hohen Stufe unterrichtet. Das Material in allen Lehrbücher beinhaltet: erst werden die Folgen und ihr Grenzwert eingeführt, danach der Begriff der Stetigkeit und Grenzwerten von Funktionen. Auf diesen werden die DQ, dann der Begriff des Integrals aufgebaut. Alle diese Begriffe werden *nicht nur veranschaulichend, sondern mathematisch präzise definiert.* Das Maßan Formalismen wurde in den Büchern auf dem Gebiet des DQ untersucht und verglichen, worüber im folgenden kurz berichtet wird. *Alle Bücher* (wenn auch nicht in gleichem Maße) nutzen den Epsilon-Delta-Formalismus. Die Unterschiede sind vor allem in den Aufgaben und den verschiedenen Visualisierungen zu finden.

B1. Mathematik 11-12. Hohen Stufe

(Gerőcs et al., 2013)

Nach einer ausführlichen Diskussion der Folgen folgt das Kapitel über Differentialrechnung. Das Thema beginnt mit der Stetigkeit von Funktionen und es werden sowohl auf Folgen basierende als auch Epsilon-Delta Definitionen behandelt. Aus Operationen der stetigen Funktionen werden die Addition und Multiplikation ebenfalls nach dem Übergangsprinzip nachgewiesen. Danach kommen die Behandlung aller Arten von Funktionsgrenzwerte (auch unendliche Grenzwerte). In allen Fällen werden sowie die auf Folgen basierten (Übergangsprinzip), wie auch „Epsilon-Delta" präzis Typ der Definitionen. Diese werden durch vier Lektionen durchschnittlich je vier ausgearbeiteten Beispiele bedeckt. In fünfter Lektion wird der Begriff von Tangenten der Funktion im bestimmten Argument, in der die Grenzposition der Schnitten bzw. die Geschwindigkeit in einem Zeitpunkt behandelt. Dem folgen die Definition des DQ als der Grenzwert der Differenzenquotienten und einige einfache Anwendungsbeispiele. Das einzige Beispiel für eine nicht differenzierbare Funktion ist die Absolutbetrag Funktion. Erst danach werden das Theorem der Summe, der Differenz, des Produkts und des Quotienten der Funktionen in zwei Lektionen hergeleitet. Dem folgen die Ableitungen der einfacheren Funktionen, die Ableitung der zusammengesetzten Funktionen schließt dieses Kapitel ab. Danach folgen Anwendungen der Differenzialrechnung, Funktionsdiskussionen und Extremwertbestimmungen durch Ableitungen. Am Ende jeder Lektion gibt es mehrere Aufgaben, mit denen Schüler üben können. In insgesamt dreizehn Lektionen dieses Lehrbuchs wird das Thema DQ behandelt, die Lehrpersonen können den auf diese Weise präsentierten Plan mit geeigneten Beispielen erweitern. Fast alle Grundkonzepte werden eingeführt, indem sie zuerst genau definiert werden, gefolgt von einigen kurzen Beispielen. Der Stil des Lehrbuchs kann jedoch als recht formal angesehen werden, da die genauen Definitionen der Grundbegriffe und die einfacheren Theoreme von Beweisen begleitet werden, während das Konzept der Ableitung in einer einzigen Lektion vorgestellt wird, das Konzept der Tangente nicht ausführlicher erörtert wird bzw. das Konzept des Limes völlig formal gelehrt wird.

B2. Mathematik für Klasse 11-12.

(Czapáry & Gyapjas, 2013)

Auch in diesem Buch folgt das Kapitel des DQ gleich nach der vollständigen Behandlung der Folgen. Konzeptionell ist der Aufbau dieses Gebietes sehr ähnlich wie bei B1, dennoch gibt es *wichtige Unterschiede* zwischen den Konzepten der beiden Lehrbücher. Im Letzteren beginnt das Kapitel über den DQ mit einem veranschaulichen Extremwertproblem und einer kurzen Einführung in die Geschichte der Mathematik. Darauf folgt ein Kapitel über elementare Funktionsdiskussionen, in dem die Autoren Fragen aufwerfen und beantworten, die sich auf die grundlegenden Eigenschaften einer Funktion beziehen, z. B. „in welchem Intervall des Definitionsbereichs ist sie monoton ansteigend (abnehmend)?“ Wir halten diese beiden Kapitel für sehr wichtig im gesamten Thema, da dies den Schülern eine Antwort auf die Frage gibt, die sie normalerweise stellen, warum wir uns mit diesem Thema beschäftigen. Erst nach dieser Einführung werden die Grenzwerte und Stetigkeit einer Funktion diskutiert. In beiden Fällen werden auch die Definitionen angegeben (sowohl Folgen- als auch Epsilon-Delta-Version), jedoch erst nach 4-5 detaillierten Beispielen. Es ist wichtig zu betonen, dass es nur eine Definition den Grenzwert in einem Argument gibt, die Grenzwerte im Unendlichen ist nur dargestellt, d.h. in 2-3 Beispielen. Die Operationsregeln für Grenzwerte werden nur als Tatsachen angegeben (ausgenommen der Fall der Addition, der bewiesen ist). Noch ein weitere wichtiger Unterschied zwischen B1 und B2 besteht darin, dass B2 ein veranschaulichendes Diagramm enthält, das die Definition der „Epsilon-Delta-Grenze“ zeigt, was zum Verständnis der doppelten Ungleichung „wenn $|x - x_0| < \delta$, dann $|f(x) - A| < \varepsilon$“ beiträgt. Nach der Erörterung der Konzepte des Grenzwerts und der Stetigkeit einer Funktion befasst sich ein ganzes Kapitel mit der veranschaulichenden Darstellung des Tangentenkonzepts, in dem fehlerhafte Vorstellungen über die Tangente (z. B. hat die Tangente nur einen gemeinsamen Punkt mit der Kurve) diskutiert werden. Darauf folgt die Einführung des Konzepts des DQ mit genauer Definition. Eine weitere Stärke von B2 besteht darin, dass es sich in einem separaten Kapitel mit der Beziehung zwischen der Differenzierbarkeit und der Stetigkeit befasst. In den nächsten Kapiteln geht es um Ableitungen elementarer Funktionen, zunächst folgt eine Diskussion des Verlaufs differenzierbarer Funktionen, und erst dann kommen die Ableitungsregeln. Beweise für die Regeln der Ableitungen von Summen und Produkten der Funktionen finden sich auch im Buch, das anschaulicher als das vorherige B1 gestaltet ist, da der Einführung eines Konzepts meistens einige gut entwickelten Beispiele vorausgehen, in denen die wichtigsten Merkmale des gegebenen Konzepts besprochen werden, dass der Schüler bereits Grundkenntnisse hat. Im vorherigen Buch B1 ist sehr oft vom Typ einer „Satz-Beweis-Format“ genutzt, was das Formalitätsniveau erhöht, und der Beweise werden meistens in wenigen (groben) Schritten geführt, was für Schüler schwieriger zu verstehen ist. Im Buch B2 treten selten „Satz-Beweis-Format“ auf, die Text der Sätze erscheinen eher als Aufgaben, und die Beweise sind ihre Lösungen, die von den Autoren in mehreren Schritten durch viele Begleittexte leichter verständlich gemacht werden. Zusammenfassend halten wir B2 für weniger formal als B1 aber in Bezug auf die Visualisierung lässt es ebenfalls zu wünschen übrig.

B3. Analysis einfach und verstehbar 1-2

(Ábrahám, 2005)

Im Band 1 diskutiert der Autor die Folgen und das Thema Funktionen, das mit deren Konzept beginnt und mit der Stetigkeit endet. Es werden (eigentliche) Grenzwerte von Funktionen auf der Grundlage der Grenzen von Folgen definiert. Uneigentliche Grenzwerte werden nur anhand von Beispielen diskutiert. Die Sätze für Grenzwerte werden nur ohne Nachweis angegeben. Für jedes Grenzwertetypen gibt es ausführliche Beispiele, aber relativ wenige, und die Ableitungen sind formal. Nach den Grenzwerten folgen die Definition der Stetigkeit von Funktionen und die Sätze über Stetigkeit von zusammengesetzten Funktionen ohne Beweise sowie einige entwickelte Beispiele.

Band 2 enthält Differential- und Integralrechnung. Das beginnt mit einem kurzen Überblick, der das Daseinsrecht des Themas mit außermathematischen Anwendungen begründet. Die Definition des DQ folgt einer längeren Einführung, in der der Autor versucht das Konzept des DQ anhand einiger ausgearbeiteter Beispiele zu erklären. Es gibt nur die geometrische Interpretation der Ableitung, obwohl der Tangentenbegriff thematisiert wird. Dann folgen die Berechnungen der Ableitungen der Grundfunktionen und die Beweise der Ableitungsregeln, die alle auf formale Weise erfolgen. Zu den Anwendungen gehören Polynom-Entwicklungen von Funktionen, die l’Hospital-Regel, Funktionsdiskussionen und Text-Extremwertaufgaben. Bei der Diskussion von Funktionen werden auch die notwendigen Kriterien gefunden und bewiesen. Der Autor legt besonderes Augenmerk auf die Erklärung der Krümmung von Funktionsgraphen. Die Funktionsdiskussion wird mit einem komplexen Beispiel abgeschlossen. Der Band 2 befasst sich auch mit Ableitungen von Funktionen mit zwei Variablen und ihrer Extrema. Zusammengefasst wird die Differentialrechnung in diesem Buch auf eher formale Weise mit wenig Veranschaulichung erörtert.

B4. Elemente der Analysis

(Schlegl & Trembeczki, 2012)

Nach der Behandlung der Folgen werden die Eigenschaften von Funktionen in acht Lektionen ausführlich vorgestellt, was unserer Meinung nach zum Verständnis der Konzepte beiträgt. Dazu gehört auch eine Diskussion der Grenzwert- und Stetigkeitseigenschaften von Funktionen. Sowohl die Heine[4]- und Cauchy-Funktionsgrenzwerte als auch die Definition der uneigentliche Grenzwerte werden behandelt. Die Stärke des Buchs besteht darin, dass es jeweils mehrere ausgearbeitete Beispiele enthält und versucht die Unterschiede zwischen den Definitionen von Heine und Cauchy zu beleuchten. Es drückt die Operationen für die Grenzwerte in Form eines Satzes aus und beweist diesen für den Fall des Produktes.

Nach der Darstellung der Eigenschaften von Funktionen findet das Thema Differenzialrechnung statt. Zur Einführung gibt es drei Beispiele, in denen die Tangente als Grenzposition der Schnitten und die momentane Geschwindigkeit enthalten sind. Der Satz über die Beziehung zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit ist bewiesen, aber die Stärke dieses Buches gegen die bisher vorgestellten besteht darin, dass es *nicht nur die Absolutwertfunktion* als nicht differenzierbare Funktion darstellt, sondern auch *ein komplexeres Beispiel* für eine solche Funktion liefert, die im ganzen Definitionsbereich stetig aber nirgends differenzierbar ist. Es soll bemerkt werden, dass dieses Beispiel nicht das Beste ist, wie einer unserer Lektoren bemerkt hat. Ein konstruktives Beispiel ist von van der Waerden gegeben, (die heute einfach durch Computer auch veranschaulicht), siehe van der Waerden (1930). Ein anderer, ungarische Mathematiker Zoárd Geőcze hat auch (siehe im fünften Abschnitt von `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Geocze/`) eine solche Funktion gefunden, doch wurde diese Eigenschaft über seine Funktion erst 1957 bewiesen.

Die Rechenregeln mit Ableitungen werden als Sätze formuliert und formal bewiesen, ähnlich die Ableitungen der elementareren Funktionen. Die Verwendung

[4]Heine-Grenzwert einer Funktion ist: Eine reelle Funktion f hat einen Grenzwert A im Argument x_0, wenn f definiert in einer Umgebung E von x_0, und für jede Folge $x_n \quad (x_n \in E)$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, gilt auch $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Wir bezeichnet es mit $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$. Ein wichtiger Satz ist unter reellen Funktionen, dass Heine- und Cauchy-Grenzwert einer Funktion sind äquivalent.

der Rechenregeln werden in einer relativ großen Anzahl von entwickelten Beispielen demonstriert. Anschließend wird die Anwendung der Differentialrechnung erörtert, die nicht nur die üblichen Funktionsdiskussionen und Extremwertberechnungen umfasst, sondern auch die Mittelwertsätze und die L'Hospital-Regel. In diesem Abschnitt werden mehrere Sätze angegeben und bewiesen, aber gibt es relativ wenige ausgearbeitete Aufgaben im Vergleich zur Bedeutung des Themas. Man kann sagen, dass dieses Buch mit Ausnahme von zwei Teilen die Differentialrechnung recht formal behandelt, die Konzepte dabei selten anschaulich vorgestellt und diskutiert werden.

Zusammenfassend kann auf dem Grund der vier vorgestellten Lehrbücher der Unterricht der Analysis in Ungarn als formal angesehen werden. Natürlich können Lehrpersonen in der Praxis mehr Gewicht auf die Veranschaulichung legen, aber hierzu liegen bislang keine Untersuchungen vor.

Zusammenfassung

In diesem Artikel versuchten wir die Vergangenheit des Analysisunterrichts in der Sekundarstufe II in Ungarn vorzustellen, den in einem Artikel von Törner et al. (2014) über mehrere europäische Länder wird fast nicht auf Ungarn eingegangen. Das motivierte uns die ungarische Situation darzustellen. Zu Beginn des 20. Jahrhunderts wurde im Ergebnis der Meraner-Reformbemühungen im Bereich des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe der Lehrplan der Mathematik an internationalen Tendenzen angepasst. In Ungarn waren Beke und Rátz die führenden Persönlichkeiten der Initiative, die Analysis in den Lehrplan aufzunehmen. Beide argumentierten, dass der wichtigste Aspekt beim Analysisunterricht die Illustration mit allen verfügbaren Werkzeugen sei, und lehnten eine übermäßige Abstraktion und Präzision ab. Dementsprechend enthält das Analysis Lehrbuch von Rátz keine formalen Definitionen oder Sätze. Die anschaungsbasierte Bildung hat sich vermutlich weltweit aufgrund des Trends New Math geändert, der zur Einführung formaler Definitionen und Theoreme auch in Ungarn führte, die noch heute in den verschiedenen Lehrbüchern enthalten sind. Eine Ausnahme bildet Ervin Deák's didaktisches Konzept der Differentialrechnung (siehe), das die experimentelle Phase aufgrund der mit dem Regimewechsel 1989 einhergehenden Änderungen leider nicht bestanden hat. Grundlegend für die Analysis ist sind die Begriffe von Limes und Konvergenz (ähnlich auch der reellen Zahl), die durch *wenigstens zwei Quantoren* definiert werden können. Für weitere Begriffe der Analysis werden drei oder noch mehr Quantoren gebraucht. Es ist bekannt, dass mit der Erhöhung der Anzahl von nötigen Quantoren die Verständnissschwierigkeit schnell wachsen. Daraus folgt, dass das Denken mit Quantoren so früh wie möglich eingeführt und möglichst in einfacheren Themen vorbereitet werden sollte. Wir haben ursprünglich diesbezügliche Untersuchungen (wie behandeln die Schüler die Quantoren) geplant, aber sie wurden verschoben. Eine andere Möglichkeit für den Analysisunterricht wäre das Konzept von Deák, wobei anstatt Konvergenz die Ungleichungen im Mittelpunkt stehen, wodurch wir bis zu einer bestimmten Zeit den Begriff der Konvergenz vermeiden können. (Siehe dazu Blum and Kirsch (1979); Karcher (1973, 1976).) Wir erreichen auch dadurch die Grundbegriffe der Analysis, nur moderater, langsamer und mit weniger Sprüngen. Dies ist möglich ist für Polynomfunktionen, in derer Fall diesen Weg einfacher zu begehen ist. Die Idee der algebraischen Vorbereitung dieses Erkenntnisprozesses kommt von Surányi (1960) in Ungarn. Eben deswegen wäre es möglich, wieder das Experiment von Deák aufzugreifen und es könnte die Umfrage von H. Burian wiederholt werden (siehe unten) um die Effizienz von Deáks Methode messen zu können.

Nach der Übersicht der ungarischen Lehrbücher haben wir den Eindruck, dass im Mathematikunterricht für Fortgeschrittene der Sekundarstufe vom Anfang an die Rolle des formalen Wissens dominiert. Es wird weniger Wert auf das konzeptbasierte Lernen gelegt, obwohl dies natürlich vom Lehrer gestaltet werden kann. Eine wichtige Frage ist, inwieweit die Studierenden die relativ formal erlernten Konzepte und Theoreme verstehen. Können sie in neuen Situationen verwendet werden, d. h. beim Lösen von Aufgaben, die keine Routineaufgaben sind? Ein Artikel über eine solche Umfrage stammt von H. Burian, der Ende 2021 in MU (Der Mathematikunterricht) hoffentlich erschienen wird.

Literatur

Ambrus, G. (2019). *Fejezetek a függvénytanítás történetéből – Beke Manó és Varga Tamás koncepciói.* `https://tudomany.blog.hu/2019/11/03/fejezetek_a_fuggvenytanitas_tortenetebol_beke_mano_es_varga_tamas_koncepcioi`. (Ungarisch)

Ambrus, G., Filler, A., & Vancsó, Ö. (2017). Functional reasoning and working with functions in mathematics teaching tradition in Hungary and Germany. *Mathematical Enthusiast*, *15*(3), 429–447. Retrieved from `https://pdfs.semanticscholar.org/68fa/3626febcfe4b9f8f95d0ff27e1ddc6ea2be0.pdf`

Artigue, M. (2000). Teaching and learning calculus: What can be learned from education research and curricular changes in France? In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education* (Vol. IV, pp. 1–15). Boston: American Mathematical Society.

Artigue, M. (2005). The integration of symbolic calculators into secondary education: Some Lessons from Didactical Engineering. In D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (Eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators* (Vol. 36). Boston, MA: Springer.

Beke, M. (1906). Reform des Mathemathikunterrrichtes. *Országos Tanáregyesületi Közlöny*, *1*, 90–96. (1906–1907. Jahrgang. Ungarisch)

Beke, M. (1909). A differenciál- és integrálszámítás középiskolai anyagáról. In *A középiskolai matematikai tanítás reformja* (pp. 21–29). Budapest: Franklin-társulat. (Ungarisch)

Beke, M. (1916). A differenciál- és integrálszámítás elemei. In *Algebra a középiskolák számára. függelék* (pp. 1–28). Budapest: Athenaeum Irodalmi és Nyomdai Rt. (Ungarisch)

Beke, M., & Scharnitzky. (1965). *Einführung in die Differenzial- und Integralrechnung.* Gondolat Verlag. (3. Ausgabe, original 1908, ungarisch)

Biza, I. (2011). Students' evolving meaning about tangent line with the mediation of a dynamic geometry environment and instructional example space. *Technology, Knowledge and Learning*, *16*, 125–151.

Blum, W., & Kirsch, A. (1979). Zu Konzepte des Analysisunterrichtes in Grundkursen. *Mathematik Unterricht*, *25*(1), 6–24.

Ábrahám, I. (2005). *Analysis einfach und verstehbar Band 2.* Szeged: Mozaik Verlag.

Deák, E. (1989). *Mathematik I-III. Experimental Lehrbücher und dazu Lehrerhandbücher.* Budapest: National Schulbuchverlag. (Ungarisch)

Deák, E. (2004). Die 'Schwache Differenzierbarkeit' – ein neuer 'eingeschobener' Begriff auf einem 'langen' Erkenntnisweg zur Analysis. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 137–140.

Deák, E. (2010). Kritische Untersuchungen über den Tangentenbegriff in mathematischer, didaktischer und mathematikhistorischer Sicht. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 233–236.

Dennis, D., & Confrey, J. (1995). Functions of a curve: Leibniz's original notion of functions and its meaning for the parabola. *The College Mathematics Journal*, *26*, 124–131.

Gallai, T., Péter, R., Hódi, E., Szabó, P., Tolnai, J., & Varga, T. (1952). *Mathematik* *für Klasse 9–12.* Budapest: National Schulbuchverlag. (Vier Band und ein Band mit Hinweis um diese zu benutzten. 1949–1952)

Gerőcs, L., Juhász, I., Orosz, G., Paróczay, J., Számadó, L., & Szászné, S. (2013). *Folgen, Diferenzialrechnung Mathematik Hohe Stufe Material.* OFI.

Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, *39*, 111–129.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis.* Heidelberg: Springer Spektrum.

Halmos, M., & Varga, T. (1978). Change in mathematics education since the late 1950's – ideas and realisation. *Educational Studies in Mathematics*, *9*(2), 225–244.

Hauchart, C., & Schneider, M. (1996). Une approche heuristique de l'analyse. *Repères IREM*, *25*, 35–62.

Hoffkamp, A. (2011). The use of interactive visualizations to foster the understanding of concepts of calculus: Design principles and empirical results. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *43*, 359–372.

Karcher, H. (1973). Analysis auf der schule. *DdM*, *1*.

Karcher, H. (1976). Erläuterungen zur analysis. *DdM*, *3*, 169–187.

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, *48*, 259–288.

Némethné, P. K. (2006). *Herr Lehrer Rátz* (Vol. 13). Szombathely.

Przenioslo, M. (2005). Introducing the concept of convergence of a sequence in secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, *60*, 71–93.

Rátz, L. (1909). A függvények és az infinitezimális számítás elemeinek tanítása középiskoláinkban. *A középiskolai matematikai tanítás reformja*, 142–155. (Ungarisch)

Rátz, L., & Mikola, S. (1914). *Elemente infinitesimaler Rechnungen in der Sekundarstufe.* Budapest: Franklin-társulat. (Ungarisch)

Surányi, J. (1960). The elements of Calculus and the Secondary School. In *The lectures of the II. Hung. Congress of Mathematics Budapest* (Vol. 2, pp. VII/27–29).

Tall, D. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *41*(4), 481–492.

Tall, D. (2011). *A sensible approach to the Calculus, Handbook on Calculus* *and its teaching.* http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/calculus.html.

Törner, G., Potari, D., & Zachariades, T. (2014). Calculus in European classrooms: curriculum and teaching in different educational and cultural contexts. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *46*, 549–560.

van der Waerden, B. L. (1930). Ein einfaches Beispiel einer nichtdifferenzierbaren stetigen Funktion. *Math. Zeitschrift*, *32 (1930)*, 474–475.

Varga, T. (1983). Vorbereitung des Begriffs von Funktion I. *Mathematikunterricht*, *3*, 66–75. (Ungarisch)

Varga, T. (1988). Mathematics education in Hungary today. *Educational Studies in Mathematics*, *19*, 291–298. doi: BF00312449

DR., HABIL. ÖDÖN VANCSÓ UNIVERSITÄTSDOZENT ODER DOZENT
LEITER DES MATHEMATIKDIDAKTISCHEN ZENTRUMS
EÖTVÖS LORÁND UNIVERSITÄT BUDAPEST

E-mail: vancso.odon@ttk.elte.hu

HANA BURIAN
LEHRERIN IN VERES PÉTER GYMNASIUM BUDAPEST
PHD STUDENT AN DER EÖTVÖS LORÁND UNIVERSITÄT

E-mail: burian.hana69@gmail.com

(Received March, 2021)