19/1 (2021), 35–55
DOI: 10.5485/TMCS.2021.0519
tmcs@science.unideb.hu
http://tmcs.math.unideb.hu

Teaching Mathematics and Computer Science

Zur Veränderung des Stellenwertes von Beweisen im Mathematikunterricht - eine Analyse von ungarischen Abiturprüfungen zwischen 1981 und 2020

Kinga Szűcs

Abstract. Proofs are not just an essential, crucial part of mathematics as a science, they also have a long tradition in Hungarian mathematics classrooms. However, the school in general and, mathematics education in particular, have been changed in the last few decades enormously, including the final secondary school examinations in mathematics. The current paper's main goal is to answer the question, how has been changed the weight and the content of reasoning and especially proving tasks in the relevant examinations.

Key words and phrases: reasoning and proving in the mathematics classroom, achievement control and rating, examination questions.

MSC Subject Classification: 97E54, 97D64, 97U44.

Einleitung

Beweise nehmen in der Mathematik als Fachwissenschaft zweifelsohne eine zentrale Rolle ein, die Mathematik ist eine zu beweisende Wissenschaft (Heintz, 2000). Eigentlich gilt mehr: Das, was die Mathematik zu einer *Wissenschaft* macht, sind eben die Beweise, weil sie einerseits eine strenge, deduktive Strukturierung der Inhalte ermöglichen, andererseits auch neues Wissen generieren. Brunner (2014) drückt diesen Zusammenhang zwischen Mathematik als Wissenschaft und Beweisen aus, indem sie formuliert, dass Mathematik durch Beweise konstituiert wird und nimmt dabei auf Rav (1999) Bezug, der behauptet, Beweise seien das

Herzstück der Mathematik, der Königsweg, um analytische Mittel zu erschaffen und Entwicklung innerhalb der Disziplin anzuregen[1].

Die Vermittlung von Beweisen und vom Erkennen der Notwendigkeit der Beweise sowie die Heranführung an das selbstständige Beweisen haben im ungarischen Mathematikunterricht eine lange Tradition. Seit der New-Math-Bewegung in den 1950-60er Jahren wird durch die Betonung der formalen Logik und der formalen Beweise viel Wert darauf gelegt, die Mathematik auch in der Schule als eine strenge, deduktive Wissenschaft darzustellen (Csíkos, 1999). Dies spiegelt sich auch in den darauf folgenden zentralen Lehrplänen wieder, so in dem Lehrplan von 1978[2] (Szabolcs, 1978 und Urbán, 1979) und im späteren Nationallehrplan (NAT) aus dem Jahr 1995[3] (Magyar Köztársaság Kormánya, 1995), auch wenn gewisse Akzentverschiebungen im Laufe der Zeit zu verzeichnen sind. Auch im zuletzt 2012 verabschiedeten Rahmenlehrplan für das Fach Mathematik (EMMI, 2012) wird die Erkenntnis der Beweisnotwendigkeit und hierdurch die Vermittlung von Beweisen als ein unerlässlicher Bereich innerhalb des Mathematikunterrichts aufgeführt: "A matematika oktatása elképzelhetetlen állítások, tételek bizonyítása nélkül.[...] Ami fontos, az a bizonyítás iránti igény felkeltése, a logikai levezetés szükségességének megértetése."(EMMI, 2012, S. 2) Und auch wenn Lehrplanauszüge nur indirekt Information über die konkret durchgeführte Unterrichtspraxis geben, listet die erfahrene Mathematiklehrerin, Lehrplanentwicklerin und Mathematiklehrerausbildnerin Somfai (2002) bezogen auf den Mathematikunterricht unter den Vorteilen auf, dass in den ungarischen Schulen bewiesen wird.

[1] Im Original heißt es: Proofs, I maintain, are the heart of mathematics, the royal road to creating analytic tools and catalysing growth."(Rav, 1999, S. 6)

[2] In beiden Dokumenten werden zahlreiche konkrete Beweise, so welche zum Satz des Pythagoras, zu den Strahlensätzen, aber auch weniger bekannte wie welche zur Mächtigkeit einer Potenzmenge oder vektorielle Beweise elementargeometrischer Sätze angesprochen. In Urbán (1979) werden zudem verschiedene Beweismethoden thematisiert, beispielsweise wird erwähnt, dass die Umkehrung des 1. Strahlensatzes mit dem Ziel unterrichtet werden soll, den indirekten Beweis kennenzulernen. Überdies wird die vollständige Induktion in der Klassenstufe 12 als verbindliche Beweismethode vermittelt. Zudem wird in der letzten Klassenstufe im Rahmen einer systematisierenden Zusammenfassung erwartet über verschiedene Beweismethoden und über Wahrheiten, die die Mathematik liefern kann, zu reflektieren.

[3] Der NAT beinhaltet weniger konkrete Beweise, dafür aber Erwartungen bezogen auf Beweise. So soll die Deduktion als Richtung der Erkenntnisgewinnung bis Ende der Klassenstufe 6 kennengelernt werden. Zusätzlich sollen bis Klassenstufe 8 einfache Beweise vermittelt und das formale Beweisen soll vorbereitet werden, bis Ende der Klassenstufe 10 soll den Lernenden klar werden, was ein Beweis in der Mathematik ist.

Gleichzeitig gilt, dass sich die Schule und somit der Mathematikunterricht in den letzten Jahrzehnten enorm verändert hat: Es erfolgte eine allgemeine Verschiebung der Zielsetzungen im Sinne des lebenslangen Lernens und neben methodischen sowie unterrichtspraktischen Erneuerungen haben neue mathematische Inhalte wie die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Graphentheorie ihren Einzug in den Mathematikunterricht gefunden, aber auch der mathematischen Modellierung als Tätigkeit wird heutzutage ein deutlich größerer Stellenwert beigemessen. Diese Veränderungen sowie der Wunsch nach der Anpassung an die internationalen Tendenzen wie die breitere Verwendung von offenen Fragen sowie alltags- und praxisnaher Fragestellungen (vgl. Lukács, 2006, S.105ff) führten dazu, dass nach jahrelanger Vorbereitung 2005 eine neue, ebenfalls zentrale Abiturprüfung in Ungarn eingeführt wurde. Diese – bis heute gültige – Abiturprüfung sowie die im Zeitraum 1980-2004 geltende "alte"Abiturprüfung werden später ausführlich thematisiert.

Vor diesem Hintergrund wird in der vorliegenden Arbeit das Ziel verfolgt, zu beschreiben und zu analysieren, inwieweit sich der Stellenwert und die Gewichtung einer – sowohl in der Fachwissenschaft Mathematik als auch im Mathematikunterricht – derart zentralen mathematischen Tätigkeit wie das Beweisen in den letzten vier Jahrzehnten in den ungarischen Abiturprüfungen verändert hat. In der mathematikdidaktischen Diskussion wird der Begriff *Beweisen* oft in verschiedener Bedeutung verwendet und mit Begründen, Argumentieren, aber auch Erklären, Entdecken und Rechtfertigen in Verbindung gebracht. In der vorliegenden Arbeit wird in Anlehnung an Brunner (2014, S. 27ff.) Beweisen zusammen mit mathematischen Argumentieren als Realisierung von Begründen in der Mathematik verstanden. Auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen mathematischem Argumentieren und Beweisen wird später noch näher eingegangen.

Forschungsfragen

Die Abiturprüfung stellt traditionsgemäß den Abschluss des sekundären Bildungsbereichs dar, die dort formulierten und vermittelten Erwartungen bezeichnen den Grad an Allgemeinbildung, der in den verschiedenen Fächern am Ende der verbindlichen Schullaufbahn erreicht werden kann und soll. Somit gilt folgende Forschungsfrage in der vorliegenden Arbeit als leitend:

Inwieweit haben sich die allgemeinen, in den Abiturprüfungen manifestierten Erwartungen am Ende des sekundären Bildungsbereichs bezogen auf Argumentieren und Beweisen in den letzten Jahrzehnten in Ungarn verändert?

Diese Veränderungen können sowohl quantitative als auch qualitative Komponenten haben. In diesem Sinne werden folgende Teilfragen formuliert:

(1) Welche quantitativen Veränderungen sind am Ende des sekundären Bildungsbereichs bezogen auf Argumentieren und Beweisen zu verzeichnen? Wie veränderte sich insbesondere der Umfang der selbstständig durchgeführten Beweise sowie der der argumentativen Aufgaben in den Abiturprüfungen?

(2) Welche qualitativen Veränderungen sind am Ende des sekundären Bildungsbereichs bezogen auf Argumentieren und Beweisen zu verzeichnen? Wie veränderten sich vor allem die angesprochenen mathematischen Bereiche, die erwarteten Beweisarten sowie der erwartete kognitive Anspruch in den einschlägigen Aufgaben?

Methodisches Vorgehen

Da die Forschungsfragen die zeitliche Veränderungen der an die Lernenden gestellten Erwartungen fokussieren, und hierzu einerseits reichlich Quelle in Form von Prüfungsaufgaben und Begleitmaterialien insbesondere aus den letzten Jahren vorliegt, andererseits aber Beobachtungen oder Messungen retrospektiv nicht durchgeführt werden können, wurde die Dokumentenanalyse als Datenerhebungsmethode der vorliegenden Studie gewählt (vgl. Mayring, 2002, S. 49). Quellenauswertung und Dokumentenanalyse sind zudem bekannterweise ein Forschungsfeld, in welchem sich vor allem qualitativ-interpretative Methoden für die Auswertung anbieten (vgl. Glaser, 2002, S. 371f.). Vor diesem Hintergrund wurde die klassische Methode der Qualitativen Inhaltsanalyse, die die Strukturierung und die systematische, theoriegeleitete Bearbeitung von – eventuell sehr umfangreichem – Textmaterial ermöglicht (vgl. Mayring, 2002, S. 121), als Auswertungsmethode gewählt. Es galt zudem als ein weiteres Argument für den Einsatz der Qualitative Inhaltsanalyse, dass sie sich insbesondere für die Analyse von Prozessen eignet (Mayring, 2015, S. 24.).

Durchführung

Bildungspolitischer Hintergrund: Die ungarische Abiturprüfung im Fach Mathematik im Zeitraum 1981-2020

In Ungarn wurde ab 1981 eine zentrale Abiturprüfung in Mathematik durchgeführt, deren Aufgaben aus einem den Lernenden bekannten Aufgabenpool ausgewählt wurden. Dies blieb bis zur strukturellen, inhaltlichen und methodischen Änderung der Abiturprüfung im Jahr 2005, also mehr als zwei Jahrzehnte lang vollständig erhalten. Über die Geschichte der Abiturprüfung in Mathematik haben bereits mehrere berichtet, an dieser Stelle soll vor allem auf Lukács (2006) und Tompa (1999b) verwiesen werden. Im Folgenden werden diese beiden, voneinander wesentlich unterschiedliche Abiturprüfungen vorgestellt.

Die ungarische Abiturprüfung im Fach Mathematik im Zeitraum 1981-2004

Typisch für den Zeitraum 1981-2004 ist, dass eine zentrale schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik durchgeführt wurde, zu der auch einheitliche Lösungs- und Korrekturhinweise veröffentlicht wurden. Eine mündliche Prüfung war erst vorgesehen, wenn der Prüfling in der schriftlichen Prüfung durchgefallen ist. Die maximale Arbeitszeit betrug 180 Minuten, die maximal erreichbare Punktzahl war seit 1982 einheitlich auf 80 Punkte festgelegt. Alle Aufgaben der schriftlichen Prüfung stammten aus der öffentlich zugänglichen und in den Schulen breit verwendeten Aufgabensammlung *Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából*, die zuerst 1980, dann überarbeitet 1984 nochmal herausgegeben wurde und deren Inhalt seit 1984 bis heute unverändert blieb. Dieser Besonderheit ist zu verdanken, dass in Ungarn jahrelang keine Aufgabenblätter in der Abiturprüfung in Mathematik verteilt worden sind. Die Aufgaben wurden durch das Vorlesen der einschlägigen Aufgabennummern (nicht der Aufgaben selbst!) im Ungarischen Fernsehen sowie im Ungarischen Rundfunk am Tag der Prüfung bekannt gegeben. Lösungs- und Korrekturhinweise wurden an die zuständigen Lehrpersonen zwar geschickt, einheitlich festgelegt war allerdings nur das Niveau des Bestehens sowie der besten Note, nicht aber das der Zwischennoten. Die Struktur der Abituraufgaben war über die Jahre hinweg gleich: Mit sechs Aufgaben (überwiegend zur Berechnung) wurde angestrebt, die komplette Breite des vermittelten Stoffes abzudecken und in einer letzten Aufgabe wurde der Beweis eines aus der Schule bekannten Satzes abgefragt[4] (Vgl. Lukács, 2006, S. 5ff.; Rójáné, 2005, S. 79ff. und Tompa, 2002, S. 30ff.).

Die Abiturprüfung wurde überwiegend von Lernenden mitgeschrieben, die kein oder kein mathematiknahes Studium anstrebten, da für Letztere bereits seit 1973 ebenfalls zentral organisierte Aufnahmeprüfungen – sogenannte Abitur-Aufnahmeprüfungen – durchgeführt wurden, die gleichzeitig zweimal ausgewertet wurden (eine Kopie wurde an die Schule geschickt): Einerseits von den Korrektoren der angestrebten Hochschule, um über die Zulassung zum Studium zu entscheiden und andererseits von der eigenen Lehrperson im Fach Mathematik in der Schule, um eine Abiturnote zu bestimmen. In der vorliegenden Arbeit wird aus Platzgründen auf die Analyse der Abitur-Aufnahmeprüfungen verzichtet, ihre Auswertung erfolgt in einer weiteren Studie der Autorin.

Die ungarische Abiturprüfung im Fach Mathematik im Zeitraum 2005-2020

Wie bereits oben erwähnt, wurde nach einer jahrelangen Vorbereitungs- und Pilotierungsphase 2005 eine neue Abiturprüfung im Fach Mathematik eingeführt. Die Beweggründe, die zugrunde gelegte und oft veränderte Rechtslage, die Vorbereitungen, Pilotierungen, der Testlauf im Jahr 2004, aber auch die Erfahrungen mit der neuen Struktur wurden ausführlich dokumentiert und veröffentlicht, an dieser Stelle wird auf Lukács (2006); Tompa (1999a); Tompa (1999b); OKÉV (2002); Rójáné (2005); Csapodi und Koncz (2013) und Csapodi (2017) verwiesen.

Die neue Abiturprüfung hat zwei Niveaustufen: Die Prüfung im mittleren Anforderungsniveau entspricht der früheren Abiturprüfung und die Prüfung im erhöhten Anforderungsniveau der früheren Abitur-Aufnahmeprüfung. Aus oben genannten Gründen wird in der vorliegenden Arbeit die Fortsetzung der früheren Abiturprüfung, also die aktuelle Abiturprüfung im mittleren Anforderungsniveau fokussiert. Auch die neue Abiturprüfung ist zentral und schriftlich, eine mündliche Prüfung ist erst vorgesehen, falls der Prüfling in der schriftlichen Prüfung eine Leistung von 10-19% gezeigt hat. Die Bearbeitungszeit hat sich nicht geändert (180 Minuten), die maximal erreichbare Punktzahl beträgt allerdings 100 Punkte. In der Prüfung werden insgesamt 17-20 Aufgaben gestellt, von denen im ersten Teil 12 elementare Aufgaben in 45 Minuten zu lösen und anschließend abzugeben

[4] In der vorliegenden Arbeit wird sich auf die Abiturprüfung in Gymnasien beschränkt, obwohl auch in den sogenannten Fachmittelschulen – diese Schulform kommt dem berufsbildenden Gymnasium im deutschen Schulsystem nahe – ein Abitur in Mathematik abgelegt wird. Dieses war aber einerseits in seiner Struktur ab 1975 identisch mit dem in den Gymnasien, andererseits stimmen seit 2002 bis heute sogar die Aufgaben überein.

sind. Danach erhält man den zweiten Teil, bei dem drei komplexe Aufgaben – mit jeweils mehreren Teilaufgaben – gestellt werden, von denen nur zwei gelöst werden müssen (Lukács, 2006, S. 19). Nachfolgende Tabelle (Tabelle 1) fasst die wichtigsten Merkmale der beiden Abiturprüfungen zusammen.

Merkmal	Abiturprüfung 1981-2004	Abiturprüfung 2005-2020
Art der Prüfung	schriftlich	
Bearbeitungszeit	180 Minuten	
max. Punktzahl	80	100
Aufgaben	6 komplexe Aufgaben + 1 Beweisaufgabe	12 elementare Aufgaben + 2 (aus 3) komplexe Aufgaben
Aufgabenpool	bekannt	unbekannt

Tabelle 1. Merkmale der Abiturprüfungen im Fach Mathematik

Dokumentenanalyse

Da die Forschungsfragen die an die Lernenden gestellten *Erwartungen* im Fokus haben, also die zu erbringende und nicht die tatsächlich erbrachte Leistung, so ist es auf der Hand liegend, die Aufgaben sowie deren Korrektur- und Bewertungshinweise als primäre Quellen der Erwartungen zu betrachten. Sollten diese Dokumente nicht mehr vorhanden sein, so können sekundäre Quellen, wie Publikationen, in denen die Originalaufgaben (zum Beispiel zum Zwecke der Analyse) abgedruckt wurden, persönliche Notizen von an der Entwicklung oder Korrektur beteiligten Personen oder Ähnliches, herangezogen werden. Gerade sekundäre Quellen sind anschließend kritisch auf ihre Glaubwürdigkeit und Aussagekraft zu prüfen, bevor eine inhaltliche Analyse unternommen wird.

Quellenlage

Unproblematisch erweist sich die Quellenlange zur neuen Abiturprüfung, also zum Zeitraum 2005-2020, da sowohl die Aufgaben als auch deren Bewertungs- und Korrekturhinweise auf Internetseiten des Ministeriums für Bildung öffentlich zugänglich sind. Dies trifft auf den Zeitraum 1981-2004 leider nicht zu. Wie oben bereits erläutert, aus der besonderen Situation in Ungarn ergibt sich, dass in diesen Jahren keine Aufgabenblätter veröffentlicht wurden und auch die Korrektur- und Bewertungshinweise nur an die Lehrpersonen geschickt, aber nie öffentlich zugänglich gemacht worden sind. Hinzu kommt die Tatsache, dass der genannte Zeitraum überwiegend in die vordigitale Zeit fällt. Anfragen der Autorin bei der Landesbibliothek und -museum für Pädagogik, beim mathematikdidaktischen Zentrum der Eötvös-Loránd-Universität Budapest, beim Bildungsbüro Ungarns sowie bei der Landesbibliothek Széchényi waren erfolgslos, diese Institutionen haben die einschlägigen Dokumente nicht aufbewahrt. Dennoch konnten einige Originaldokumente fündig gemacht werden: Zwei ehemalige Kolleginnen des Landesinstituts für Pädagogik und ein Gymnasiallehrer haben die Aufgaben sowie deren Korrektur- und Bewertungshinweise aus den Zeiträumen 1987-1989 und 1993-2004 aus ihrer eigenen Sammlung zur Verfügung gestellt. Diese Quellen wurden – obwohl sie aus privatem Besitz stammen – als primäre Quellen eingestuft, da die zur Verfügung stellende Personen selbst an der Entwicklung bzw. Korrektur der Aufgaben beteiligt waren. Als eine weitere primäre Quelle gelten zudem die zwei Aufgabensammlungen Gimes (1980) und Gimes (1984). Überdies sind weitere – sekundäre – Quellen gefunden worden: In den Publikationen von Lukács (2006), Rábai (1991) sind Originalaufgaben und Lösungshinweise (diese sind nicht identisch mit den Korrektur- und Bewertungshinweisen) aus den Jahren 1991-1992 sowie in den Publikationen von Némethy (1997) und Gábos (1991) Aufgabennummern aus den Jahren 1981-1996 veröffentlicht worden. Über die genannten Quellen hinaus konnten Informationen über die Bepunktung der Aufgaben aus den Jahren 1985-1986, 1990 und 1992 aus privaten Notizen von Molnár (2004) rekonstruiert werden. Somit ist die Quellenlage bezogen auf die Abituraufgaben zwar vollständig, Informationen über die Bewertung fehlen aber aus den Jahren 1981-1984 und 1991. In der nachfolgenden Tabelle (Tabelle 2) ist die gefundene Quellenlage nochmal übersichtlich dargestellt. Es soll angemerkt werden, dass der Einfachheit und Übersichtlichkeit halber nur die Aufgaben zum jeweiligen Haupttermin in die Studie einbezogen wurden.

Quellenkritik

Die Quellen werden nachfolgend auf ihre Autorenschaft und Gesichertheit, ihre mögliche Aussagekraft, ihre Intendiertheit sowie zeitliche Nähe hin kritisch überprüft.

Die Dokumente auf der Internetseite des Ungarischen Bildungsministeriums gelten wegen der Hoheit des Autors als authentisch, glaubwürdig und vollkommen gesichert. Diese Dokumente werden zeitnah an die schriftlichen Prüfungen

	Abiturprüfung 1981-2004		Abiturprüfung 2005-2020	
Quelle	Aufgaben	Korrektur- und Bewertungs-hinweise	Aufgaben	Korrektur- und Bewertungs-hinweise
www.oktatas.hu			2005-2020	2005-2020
Lukács (1998)	1994-1998	1994-1998		
Fried (2004)	1993-2004	1993-2004		
Kmetyó (2001)	1987-1989, 1997, 2000-2001	1987-1989, 1997, 2000-2001		
Rábai (1991)	1991	Lösungs-vorschläge		
Lukács (2006)	1992			
Némethy (1997)	1985-1996			
Gábos (1991)	1981-1991			
Molnár (2004)	1983-2004	1985-1986, 1990, 1992-2004[5]		

Tabelle 2. Quellenlage zu den Abituraufgaben im Fach Mathematik

hochgeladen und nicht geändert, die einzige Absicht ist die öffentlich zugängliche Dokumentation des Geschehenen.

Die Dokumente aus Lukács (1998) und Fried (2004) können als authentische Quellen angesehen werden, da diese Personen an der Entwicklung der Aufgaben und der Korrektur- und Bewertungshinweise beteiligt waren und somit an der Glaubwürdigkeit der Quellen nicht gezweifelt werden kann. Auch die Dokumente von Kmetyó (2001) können ähnlich gewertet werden. Die veröffentlichten sekundären Quellen – Rábai (1991), Lukács (2006), Némethy (1997) und Gábos (1991) – sind zwar glaubwürdig, da vermutet werden kann, dass Lektoren die Daten vor der Veröffentlichung überprüft haben, dennoch kann nicht ausgeschlossen werden, dass beim Abtippen der Aufgaben beziehungsweise der Aufgabennummern (hier geht es um lange Listen voller Nummern) Fehler eingeschlichen sind. Bei den privaten Notizen von Molnár (2004) kann weder eine unabhängige Überprüfung vermutet, noch von einer fehlerfreien Datenlage ausgegangen werden. Von einer vollständigen Gesichertheit der Daten kann daher nur bei den Dokumenten von Lukács (1998), Fried (2004) und Kmetyó (2001) ausgegangen werden. Dennoch wird allen Quellen eine hohe Aussagekraft beigemessen, da sie entweder primäre Informationen (Originalaufgaben) oder solche enthalten, aus denen die primären Informationen gewonnen werden können (genaue Verweise durch Nummern auf die Aufgaben, Punktzahlen). Insbesondere bei den Dokumenten aus privatem Besitz ist die Absicht zu vermuten, Erstere für den eigenen Gebrauch und nur für die eigene Zeit aufzubewahren. Das ist wahrscheinlich der Grund dafür, warum so viele Dokumente gar nicht mehr aufzufinden sind: Keiner hatte die Absicht, diese Dokumente für die Nachfahren aufzuheben oder in irgendeiner Form für eine spätere Bearbeitung aufzubereiten. Ausnahmen hiervon bilden die Quellen Rábai (1991) und Lukács (2006), welche die Aufgaben wertend beziehungsweise samt Lösung einem bestimmten Publikum präsentieren sowie die Publikationen von Gábos (1991) und Némethy (1997), die ohne Wertung die Informationen für die Nachfahren zusammentragen. Eine zeitliche Nähe der Erstellung kann vor allem bei den Dokumenten aus privatem Besitz vermutet werden, bei den weiteren Quellen muss beachtet werden, dass Gábos (1991) auf zehn Jahre, Némethy (1997) auf 12 Jahre zurückblickt und Lukács (2006) 14 Jahre später die Aufgaben aus dem Jahr 1992 zitiert. Dies ist ein weiterer Grund dafür, letztgenannten Quellen als nicht hundertprozentig gesichert einzuordnen.

Bezogen auf fast jedes Jahr aus dem Zeitraum 1981-2004 sind mehrere Quellen überliefert worden, diese wurden verglichen und auf etwaige Ungereimtheiten überprüft. Der Vergleich lieferte folgendes Ergebnis: In den Quellen stimmt eine Aufgabe aus dem Jahr 1985 nicht überein, hier wurde die Angabe von Gábos (1991) für die weitere Untersuchung als Abituraufgabe gewählt. In der Publikation von Rábai (1991) ist die zweite Aufgabe an einer Stelle nicht originaltreu abgedruckt, maßgebend für die weitere Untersuchung wird die Originalaufgabenstellung aus Gimes (1984) sein. Überdies wich die Punktzahl bei einer einzigen Aufgabe aus dem Jahr 1999 in Molnár (2004) von der in den authentischen Korrektur- und Bewertungshinweisen von Fried (2004) ab, hier wurde letztere Quelle als richtungsweisend gewählt.

Strukturierende Qualitative Inhaltsanalye

In diesem Abschnitt wird das Vorgehen bei der am Datenmaterial durchgeführten Qualitativen Inhaltsanalyse ausführlich vorgestellt. Da das Ziel in der Aufdeckung von zeitlichen Veränderungen bezogen auf den Stellenwert von Beweisen und Argumentieren besteht und zum Beweis- und Argumentationsbegriff bereits verschiedene Modelle und Kategorien existieren, eignet sich die sogenannte strukturierende Qualitative Inhaltsanalyse besonders. Hierbei geht es darum, dass auf das Datenmaterial ein bereits vorhandenes, aus der Theorie gewonnenes Kategoriensystem deduktiv angewandt wird. Im Folgenden wird auf die Schritte der Analyse einzeln eingegangen.

Ausgangsmaterial

Eine für den Mathematikunterricht brauchbare Definition des Argumentierens – das nach dieser Auffassung das Beweisen mit einschließt – stammt von Schwarzkopf: "Der im Unterricht stattfindende soziale Prozess, bestehend aus dem Anzeigen eines Begründungsbedarfs und dem Versuch, diesen Begründungsbedarf zu befriedigen, wird als Argumentation bezeichnet."(Schwarzkopf, 2000, S. 240.). Demnach ist die Aufforderung zur Begründung notwendig, um über Argumentieren in der Mathematik zu reden. In Anlehnung an diese Definition wurden alle Abituraufgaben als Argumentations- oder Beweisaufgaben eingestuft, bei denen ein Begründungsbedarf kenntlich gemacht wurde, hierzu gehören Aufgaben mit den Operatoren "Zeige"(mutassa meg), "begründe"(indokolja), "beweise"(bizonyítsa be) und "bestätige"(igazolja). Aufgaben mit den genannten Operatoren bildeten das Ausgangsmaterial. Als eine Kodiereinheit (kleinste kodierte Textstelle) galt eine Teilaufgabe, als eine Kontexteinheit (größte kodierte Textstelle) eine Aufgabe, die einen der genannten Operatoren enthält.

Kategoriensystem in Anlehnung an den Begründungsbegriff nach Brunner

Brunner (2014) stellt ein Modell vor, das Argumentieren und Beweisen im Mathematikunterricht als Kontinuum auffasst. Der Vorteil des Modells ist, dass es den Unterschied zwischen dem kognitiven Anspruch in Begründungen verdeutlicht, wodurch unterschiedliche Qualitäten von Begründungen erfassbar gemacht werden. Da im Fokus der vorliegenden Studie vor allem qualitative Veränderungen in den von den Lernenden erwarteten Argumentations- und Beweisaufgaben stehen, scheint das Modell geeignet, auf das Datenmaterial angewandt zu werden. Das Modell (Brunner, 2014, S. 31.) betrachtet Begründen als Oberbegriff, der vier verschiedene Ausprägungen in der Mathematik haben kann:

(1) *Alltagsbezogenes Argumentieren* liegt vor, wenn solche Begründungsarten, zum Beispiel die Berufung auf eine Autorität, verwendet werden, die nicht den mathematischen Konventionen entsprechen.

(2) Man spricht von *Argumentieren mit mathematischen Mitteln*, wenn mathematische Mittel einbezogen werden, aber nicht zwangsläufig logisches Schließen. Hierzu gehört die Argumentation an einem konkreten Beispiel.

(3) Über *logisches Argumentieren mit mathematischen Mitteln* ist die Rede, falls logisches Schließen, sprich Deduktion vorliegt, diese aber nicht formal erfolgt.

(4) In der Mathematik bezeichnet man *formal-deduktives Beweisen* eine Begründung, die eine Kette deduktiver Schlüsse darstellt, die formal korrekte Argumente verwendet und formal verfasst ist.

Da das Modell Begründung als Oberbegriff verwendet, werden in der vorliegenden Arbeit die oben aufgelisteten vier Ausprägungen Begründungsarten genannt. Die einzelnen Begründungsarten gelten als jeweils eine Kategorie.

Kodierung

Die als Ausgangsmaterial ausgewählten Abituraufgaben wurden einzeln jeweils einer der Kategorien (2)-(4) zugeordnet, da es ausgeschlossen werden kann, dass ein alltagsbezogenes, also nichtmathematisches Argumentieren in einer Abiturprüfung im Fach Mathematik erwartet wird. Bei der Zuordnung wurden – falls dies anhand der Aufgabestellung nicht eindeutig entscheidbar war und die entsprechenden Dokumente vorhanden waren – die einschlägigen Korrektur- und Bewertungshinweise zur Explikation herangezogen. Die nachfolgende Tabelle (Tabelle 3) – ein Auszug aus dem Kodierleitfaden – gibt Einblick in den Kodierungsprozess. Die Aufgaben wurden von der Autorin der vorliegenden Arbeit ins Deutsche übersetzt.

Mitkodiert wurden überdies die für die Aufgabe maximal vergebbare Punktzahl, der angesprochene mathematische Bereich (einer der Bereiche: Arithmetik, Algebra, Analysis, Geometrie, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Trigonometrie, Graphentheorie, Mengenlehre/Logik) sowie die erwartete Beweisart, falls es um eine Beweisaufgabe ging (direkter Beweis/indirekter Beweis oder vollständige Induktion, vgl. Brunner, 2014, S. 15f). Ein konkretes Beispiel für die Kodierung gezeigt an der letzten Aufgabe aus Tabelle 3 findet man in Tabelle 4.

Ergebnisaufbereitung

Nach der Kodierung wurde zuerst die Gesamtpunktzahl jeder einzelnen Begründungsart-Kategorie für jedes Jahr und anschließend ihr Anteil an der Gesamtpunktzahl der Abiturprüfung bestimmt. Dasselbe wurde durch Summation der Punktzahlen der Kategorien innerhalb eines Jahres für die Gesamtpunktzahl der Argumentations- und Beweisaufgaben durchgeführt. Danach wurden die Punktzahlen der einzelnen mathematischen Bereiche innerhalb der Argumentations- und

Kategorie	**Argumentieren mit mathematischen Mitteln**
Definition	Begründung mit mathematischen Mitteln, aber kein deduktives Schließen.
Ankerbeispiel	Ins Finale eines Wettlaufs haben es sechs Läufer geschafft, man bezeichne sie mit A, B, C, D, E und F. Einige Meter vor dem Ziel ist bereits zu sehen, dass C Letzter wird, zudem ist klar, dass B und D die ersten zwei Plätze untereinander teilen werden. Wie viele Möglichkeiten des Endergebnisses sind denkbar, wenn es keine Gleichplatzierung geben wird? Begründen Sie Ihre Antwort! (2013)
Begründung	Im Beispiel ist systematisches Probieren denkbar.
Kodierregel	Begründung durch die Auseinandersetzung mit konkreten Beispielen möglich.
Kategorie	**logisches Argumentieren mit mathematischen Mitteln**
Definition	Deduktives Schließen ist notwendig, aber kein formales Schließen wird verlangt.
Ankerbeispiel	Es ist bekannt, dass $\frac{5}{7} = 0,\overline{714285}$ ein unendlicher periodischer Dezimalbruch ist. Bestimmen Sie die 100. Nachkommastelle! Begründen Sie Ihre Antwort! (2020)
Begründung	Es geht um eine deduktive Begründung unter Rückgriff auf die Definition der Periodenlänge.
Kodierregel	Allgemeine Sätze, Definitionen müssen angewandt werden, die Begründung erfolgt aber in einem konkreten Kontext, sodass kein formaler Beweis notwendig ist.
Kategorie	**formal-deduktives Schließen**
Definition	Formale, deduktive Begründung ist notwendig.
Ankerbeispiel	Das erste Glied einer arithmetischen Folge ist a_1 ihre Differenz d. Beweisen Sie, dass $a_n = a_1 + (n-1)d$ und $S_n = n \cdot \frac{a_1+a_n}{2}$ gelten! (1992)
Begründung	Der Operator und die formale Notation deuten darauf hin, dass hier ein formaler Beweis erwartet wird.
Kodierregel	Anspruch eines formal geführten Beweises muss erkennbar sein.

Tabelle 3. Auszug aus dem Kodierleitfaden

Jahr	Aufgabe	Kategorie	Punktzahl	m. Bereich	Beweisart
1992	Nr.101.	formal-ded. Beweis	10	Analysis	d. Beweis oder vollst. Ind.

Tabelle 4. Beispiel für Kodierung einer Aufgabe

Beweisaufgaben wiederum für jedes Jahr und zum Schluss deren Anteil an der Gesamtpunktzahl der Argumentations- und Beweisaufgaben bestimmt. Dieser Vorgang soll am Beispiel der Abiturprüfung 2013 verdeutlicht werden. Die Kodierung der identifizierten Aufgaben zum Argumentieren und Beweisen ist in Tabelle 5 zu finden.

Jahr	Aufgabe	Kategorie	Punktzahl	m. Bereich	Beweisart
2013	Nr.3.	log. Arg. m. m. M.	3	Geometrie	
	Nr.5.	Arg. m. m. M.	3	Geometrie	
	Nr.7.	log. Arg. m. m. M.	4	Analysis	
	Nr.10.	Arg. m. m. M.	3	Arithmetik	
	Nr.16.b	log. Arg. m. m. M.	6	Graphenth.	

Tabelle 5. Kodierung der Argumentations- und Beweisaufgaben aus dem Jahr 2013

Den Daten kann man entnehmen, dass im Jahr 2013 die Aufgaben aus dem Tätigkeitsfeld Argumentieren und Beweisen insgesamt 19 Punkte (entspricht 19% der Abiturprüfung) ausmachten. Hiervon gehören Aufgaben für insgesamt 6 Punkte (entspricht 6% der Abiturprüfung) zu der Kategorie "Argumentieren mit mathematischen Mitteln"und Aufgaben für insgesamt 13 Punkte (entspricht 13% der Abiturprüfung) zu der Kategorie "logisches Argumentieren mit mathematischen Mitteln", die Kategorie "formal-deduktives Beweisen" bleibt unbelegt. Die mathematischen Bereiche Geometrie, Analysis, Arithmetik und Graphentheorie sind der Reihe nach mit 6, 4, 3 und 6 Punkten im Tätigkeitsfeld Argumentieren und Beweisen vertreten, dies entspricht einem Anteil (an der Gesamtpunktzahl des Tätigkeitsfeldes) von 32%, 21%, 16% und 32%.

Die ermittelten Daten zeigten sehr hohe Schwankungen von Jahr zu Jahr: Beispielsweise konnte im Jahr 2015 nur eine Argumentationsaufgabe für 2 Punkte identifiziert werden, während im Jahr davor Argumentationsaufgaben für insgesamt 22 Punkte gestellt wurden. Aus diesem Grund sowie der besserer Übersichtlichkeit halber wurden die Daten aus vier darauffolgenden Jahren jeweils gebündelt. Wie oben bereits beschrieben, die Punktzahlen aus dem Zeitraum 1989-1992 sind nicht vollständig, da diese aus dem Jahr 1991 fehlen. Aus diesem Grund wurden die vorhandenen Daten aus den Jahren 1989-1990 sowie 1992 stellvertretend für den entsprechenden Zeitraum verwendet.

Überdies soll angemerkt werden, dass die Punktzahlen der Argumentationsaufgaben aus den Jahren 1981-1984 geschätzt wurden, da aus diesen Jahren keine Quellen mit den entsprechenden Daten vorgefunden werden konnten. In diesen Jahren konnten jeweils zwei Aufgaben aus dem Tätigkeitsfeld Argumentieren und Beweisen identifiziert werden: eine Beweisaufgabe und eine Aufgabe zum logischen Argumentieren mit mathematischen Mitteln. Da die Beweisaufgaben in den Jahren 1985-2004 bis auf eine Ausnahme jedesmal mit mindestens 12 Punkten bewertet wurden, wurde dieser Wert als Schätzwert für die Punktzahl der jeweiligen Beweisaufgabe in den Jahren 1981-1984 genommen. Ähnlich wurde bei den Aufgaben zum logischen Argumentieren mit mathematischen Mitteln vorgegangen: Da keine Vergleichswerte vorliegen, wurde jeweils 8 Punkte als Schätzwert genommen, da bis auf eine Ausnahme im gesamten Zeitraum 1981-2004 jede Abituraufgabe mindestens 8 Punkte wert war. Da Beweisaufgaben öfters auch mit mehr – bis zu 16 Punkten – bewertet wurden, sowie Aufgaben zum logischen Argumentieren mit mathematischen Mitteln recht komplex sind, kann man auch davon ausgehen, dass die Schätzwerte das tatsächliche Gewicht der Beweis- und Argumentationsaufgaben im Zeitraum 1981-1984 eher unter- als überschätzen.

Ergebnisse

Quantitative Veränderungen der Erwartungen bezogen auf Argumentieren und Beweisen

Die Veränderungen, die den Umfang der Argumentations- und Beweisaufgaben sowie den der einzelnen Begründungsarten an der gesamten schriftlichen Abiturprüfung betreffen, sind in der Abbildung (1) verdeutlicht. In Hinblick auf den Umfang der Argumentations- und Beweisaufgaben können drei zeitliche Abschnitte voneinander unterschieden werden: Im ersten Abschnitt, nämlich im Zeitraum 1981-1984 machten diese Aufgaben ein Viertel der schriftlichen Abiturprüfung aus. Da es hierbei um einen niedrigen, geschätzten Wert geht, kann sogar vermutet werden, dass der tatsächliche Anteil 25% übersteigt. Im zweiten Abschnitt, nämlich zwischen 1985 und 2004 stabilisierte sich der Anteil der Argumentations-

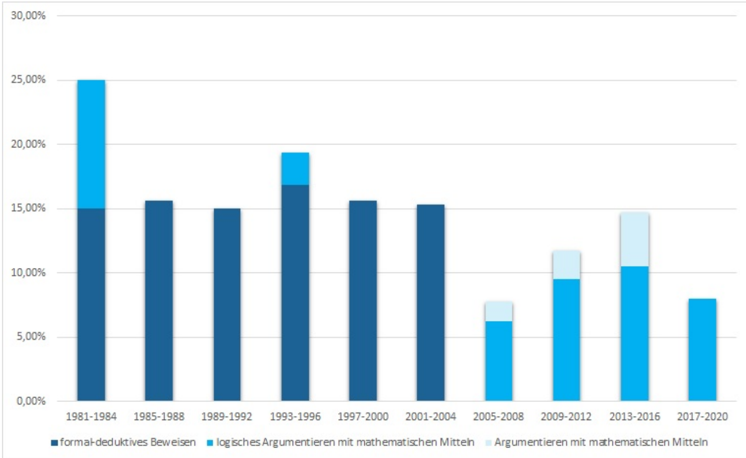

Abbildung 1. Durchschnittlicher Anteil der Argumentations- und Beweisaufgaben an der Abiturprüfung nach Begründungsart[6]

und Beweisaufgaben – die bis auf eine einzige Aufgabe im Zeitraum 1993-1996 ausschließlich Aufgaben zum formal-deduktiven Beweisen waren – bei etwa 15%. Die Einführung der neuen Abiturprüfung 2005 – dritter Abschnitt: 2005-2020 – bedeutete eine weitere Zäsur bezüglich des Tätigkeitsfeldes Argumentieren und Beweisen, da der Anteil der einschlägigen Aufgaben zunächst auf 6,25% sank. Seitdem ist zwar eine steigende Tendenz zu beobachten, diese wurde aber in den letzten Jahren erneut durchbrochen (Der Durchschnitt der letzten vier Jahre – 2017-2020 – beträgt lediglich 8%.) und das Niveau der alten Abiturprüfung (15%) wurde nur im Zeitraum 2013-2016 wieder erreicht.

Offensichtlich sind die einzelnen Begründungsarten in den oben identifizierten drei Abschnitten nicht gleich gewichtet. Im ersten und zweiten Abschnitt (1981-2004) dominieren Aufgaben zum formal-deduktiven Beweisen, ihr Anteil ist stabil bei ca. 15%. Aufgaben zum logischen Argumentieren mit mathematischen Mitteln kommen zuerst im ersten Abschnitt durchgehend mit einem relativ hohen Anteil von 10% vor, dann im dritten Abschnitt seit 2005 mit einem steigenden Anteil (Werte zwischen 6,25-10,5%). Der Anteil von 2% im Zeitraum 1993-1996 ist eher als Ausreißer einzuordnen, zumal er einer einzigen Aufgabe aus dem Jahr 1996 zu verdanken ist. Aufgaben zum Argumentieren mit mathematischen Mitteln erscheinen in den Abiturprüfungen erst im dritten Abschnitt: Ihr Anteil ist relativ gering, allerdings steigend bis 2016 (Werte von 1,5% - 4,25%). Danach verschwanden sie in den letzten Jahren (2017-2020) komplett aus den Abituraufgaben.

Qualitative Veränderungen der Erwartungen bezogen auf Argumentieren und Beweisen

Die oben präsentierten quantitativen Veränderungen machen gleichzeitig auch qualitative Veränderungen deutlich: Nach einer mehr als zwei Jahrzehnte umfassenden Dominanz der Aufgaben zum formal-deduktiven Beweisen rücken seit der Einführung der neuen schriftlichen Abiturprüfung kognitiv weniger anspruchvolle Aufgaben innerhalb der Argumentations- und Beweisaufgaben, so Aufgaben zum logischen Argumentieren mit mathematischen Mitteln und welche zum Argumentieren mit mathematischen Mitteln in den Vordergrund. Betrachtet man die Aufgaben zum Argumentieren und Beweisen als Bezugsgröße, so ist diese Veränderung noch deutlicher (Abbildung 2).

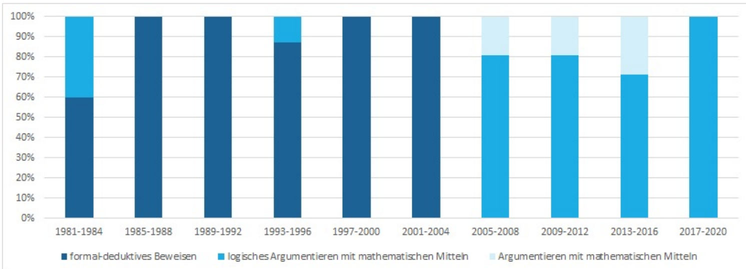

Abbildung 2. Durchschnittlicher Anteil der einzelnen Begründungsarten an der Gesamtheit der Argumentations- und Beweisaufgaben

Bezogen auf die in den Aufgaben zum formal-deduktiven Beweisen erwarteten Beweisarten zeigt sich ein sehr einseitiges Bild (dieser Aspekt konnte nur im Zeitraum 1981-2004 untersucht werden): Keine der gestellten einschlägigen Aufgaben verlangte einen indirekten Beweis oder wäre im angesprochenen Kontext ein indirekter Beweis auf der Hand liegend. Andersherum gilt, dass jedesmal ein elementarmathematischer direkter Beweis existiert, in drei Fällen konnte zudem als Alternative zum direkten Beweis die Möglichkeit der vollständigen Induktion als Beweisart vermerkt werden.

Hinsichtlich der angesprochenen mathematischen Bereiche zeigt sich ebenfalls eine deutliche zeitliche Veränderung. Abbildung (3) kann einerseits entnommen werden, dass die Geometrie nach wie vor die Aufgaben zum Tätigkeitsfeld Argumentieren und Beweisen dominiert (dies ist der langen ungarischen Tradition der Geometrie in der Schulmathematik zu verdanken), allerdings ist ihre Dominanz im Zeitraum 2005-2016 zurückgegangen. Im ersten Abschnitt, also zwischen 1981 und 1984 waren neben geometrischen Aufgaben auch andere Bereiche vertreten, so die Analysis, die Trigonometrie und die Algebra. Im zweiten Abschnitt, also im Zeitraum 1985-2004 ist eine deutliche Einengung der mathematischen Bereiche zu verzeichnen, neben der Geometrie werden jeweils nur ein-zwei weitere Bereiche angesprochen, mal die Analysis, mal die Trigonometrie, mal die Arithmetik. Seit der Einführung der neuen Abiturprüfung 2005 macht sich eine Ausweitung des Tätigkeitsfeldes Argumentieren und Beweisen auf weitere mathematische Bereiche, so auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung, Logik und Mengenlehre sowie Graphentheorie bemerkbar. Insgesamt ist für den dritten Abschnitt, also für den Zeitraum 2005-2020 charakteristisch, dass die Aufgaben nicht aus einem oder maximal zwei Bereichen stammen, sondern bis zu sieben mathematische Bereiche abdecken. Zudem zeigt sich ein Vormarsch der Bereiche Arithmetik seit 1997 sowie Wahrscheinlichkeitsrechnung seit 2009.

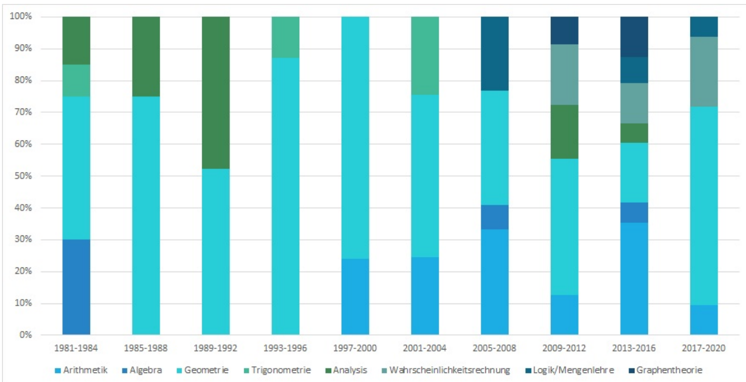

Abbildung 3. Durchschnittlicher Anteil der einzelnen mathematischen Bereiche an der Gesamtheit der Argumentations- und Beweisaufgaben

Diskussion

Den Ergebnissen ist der eindeutige Rückgang des Stellenwertes des Tätigkeitsfeldes Argumentieren und Beweisen, aber inbesondere des Beweisens zu entnehmen. Quantitativ gesehen entspricht der Anteil der Aufgaben zum Argumentieren an der gesamten Abiturprüfung in den letzten Jahren etwa der Hälfte des einschlägigen Anteils vor 2004 und etwa einem Drittel desselben Anteils vor 1985. Qualitativ gesehen ist einerseits eine Verlagerung des Schwerpunkts von formal-deduktiven Beweisen hin zu logischem Argumentieren mit mathematischen Mitteln zu verzeichnen, anderseits sind seit 2005 die Auflockerung der Dominanz der Geometrie und die Übertragung mathematischer Argumentationen auf weitere Bereiche wie zum Beispiel Wahrscheinlichkeitsrechnung zu beobachten.

Die ermittelten Tendenzen sind nur im aktuellen bildungspolitischen Kontext zu interpretieren. Bei der Einführung der neuen Abiturprüfung 2005 waren neue Zielsetzungen formuliert, so die Heranziehung neuer, in der Schule bisher nicht oder kaum thematisierten Bereiche, die stärkere Gewichtung der mathematischen Modellierung und des Alltagsbezugs, aber auch die Formulierung und angemessene Notation einfacher Beweise (Lukács, 2006, S. 20). Somit kann festgestellt werden, dass während die ermittelte Ausbreitung der Argumentationsaufgaben auf neue mathematischen Bereiche mit den deklarierten Zielen im Einklang steht, widerspricht denen das Verschwinden der Beweisaufgaben. Zudem ist Letzteres auch aus dem Blickwinkel kritisch zu betrachten, dass sich die Lernenden nach Abschluss des sekundären Bildungsbereichs in einer komplexen Welt zurechtfinden und komplexe politische, wirtschaftliche und naturwissenschaftliche Argumentationen nachvollziehen und einordnen können müssen. Wie soll dies geschehen, wenn die Fähigkeit zum Argumentieren nur auf einer niedrigeren kognitiven Ebene erwartet wird? Ein weiterer Kritikpunkt gilt für eine Anomalie, die die praktische Umsetzung der Abiturprüfung betrifft und für welche die Entwickler aber keine Verantwortung tragen: Obwohl dies bei der Einführung nicht beabsichtigt war, studieren dennoch viele mit einem Abitur im Fach Mathematik auf dem mittleren Anforderungsniveau seit 2005 mathematiknahe Fächer oder gar Mathematik, da die Hochschulen – trotz den Empfehlungen – das Abitur auf erhöhtem Anforderungsniveau nur noch vereinzelt als Zulassungsvoraussetzung einfordern. Gerade im einschlägigen Studium ist jedoch die Fähigkeit zum mathematischen Argumentieren einschließlich Beweisen unerlässlich. Ein möglicher Ausweg kann darin bestehen, zusätzlich zu den bisherigen Aufgaben zum Argumentieren auch einfache Beweisaufgaben in die schriftliche Abiturprüfung aufzunehmen.

Danksagung

Ein besonderer Dank der Autorin gilt allen, die sie bei der Suche nach den Originaldokumenten der Abiturprüfungen sowie nach einschlägigen, schwer zugänglichen Studien unterstützt haben, so vor allem Gabriella Ambrus, Csaba Csapodi, Katalin Fried, Tünde Kántor, Sándor Kántor, András Kmetyó, Erzsébet Lajos, Judit

Lukács, Gabriella Molnár, Tibor Szűcs, Ödön Vancsó und den Mitarbeiter*innen der Bezirks- und Stadtbibliothek II. Rákóczi Ferenc Miskolc.

Literatur

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Grundlagen, Befunde und Konzepte.* Springer Spektrum.

Csapodi, Cs. (2017). *A matematika érettségi vizsga elemzése 2005-2015.* Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola.

Csapodi, Cs. und Koncz, L. (2013). *A 2012. május-júniusi érettségi feladatsor és az egyes feladatok mérésmetodikai vizsgálata.* Expanzió Humán Tanácsadó.

Csíkos, Cs. (1999). Iskolai matematikai bizonyítások és a bizonyítási képesség. *Magyar Pedagógia*, *99*(1), 3-21.

Fried, K. (2004). *Abituraufgaben. Korrektur-und Bewertungshinweise 1993-2004. Private Sammlung.*

Gábos, A. und Halmos, M. (1991). *Készüljünk az érettségire!* Calibra Kiadó.

Gimes, G. (Ed.). (1980). *Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából.* Nemzeti Tankönyvkiadó.

Gimes, G. (Ed.). (1984). *Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából.* Nemzeti Tankönyvkiadó.

Glaser, E. (2013). Dokumentenanalyse und Quellenkritik. In B. Friebertshäuser, A. Langer und A. Prengel (Ed.), *Handbuch Qualitative Forschungsmethoden in der Erziehungswissenschaft. Teil 2.* (p. 365-175). Weinheim & Basel: Beltz Juventa.

Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin.* Springer.

Kmetyó, A. (2001). *Abituraufgaben. Korrektur-und Bewertungshinweise 1987-1989, 1997, 2000-2001. Private Sammlung.*

Lukács, J. (1998). *Abituraufgaben. Korrektur-und Bewertungshinweise 1994-1998. Private Sammlung.*

Lukács, J. (2006). Megtarva - megújulva. A matematikaérettségi vizsga változásának folyamata. In Z. Horváth und J. Lukács (Ed.), *Új érettségi Magyarországon: honnan? hová? hogyan? egy folyamat állomásai* (p. 105-126). Budapest: Országos Közoktatási Intézet.

Mayring, P. (2002). *Einführung in die qualitative Sozialforschung: Eine Anleitung zum qualitativen Denken.* Beltz.

Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken.* Beltz.

Molnár, G. (2004). *Private Notizen.*

Némethy, K. (1997). Az 1985-től kitűzött írásbeli matematika érettségi feladatok. *A matematika tanítása*, *5*(1), 17.

Rábai, I. (1991). *Matematika érettségi, felvételi feladatok és megoldások 1991.* Calibra Kiadó.

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica*. doi: 10.1093/philmat/7.1.5

Rójáné, O. E. (2005). A régi és az új középszintű matematika érettségi vizsga összehasonlítása. *Iskolakultúra*, *15*(9), 79-96.

Schwarzkopf, R. (2000). *Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und Fallstudien.* Franzbecker.

Somfai, Zs. (2002). A matematika tantárgy helyzete felső tagozaton és a középiskolában. *Új Pedagógiai Szemle*, *52*(12), 99-115.

Szabolcs, O. (Ed.). (1978). *A gimnáziumi nevelés és oktatás terve.* Tankönyvkiadó.

Tompa, K. (1999a). A matematika érettségi feladatbank munkálatai az országos közoktatási intézet 1997-1998. évi projektjében. *Iskolakultúra*, *9*(8), 33-47.

Tompa, K. (1999b). A matematika érettségiről a reform tükrében. *Iskolakultúra*, *9*(6-7), 28-36.

Urbán, J. (1979). *A gimnáziumi nevelés és oktatás terve. Tantervi útmutató. Matematika.* Tankönyvkiadó.

KINGA SZŰCS
UNIVERSITÄT ERFURT, ERZIEHUNGSWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT
MATHEMATIK UND MATHEMATIKDIDAKTIK
NORDHÄUSER STRASSE 63 ERFURT 99089 DEUTSCHLAND

E-mail: kinga.szuecs@uni-erfurt.de

(Received March, 2021)