A Bolyaiakról a temesvári levél 200. évfordulója kapcsán[1]

Nyul Gábor

egyetemi docens, Matematikai Intézet, Debreceni Egyetem, TTK

200 évvel ezelőtt, 1823. november 3-án írta Bolyai János édesapjának, Bolyai Farkasnak a tudománytörténeti jelentőségű temesvári levelet. Az évforduló tiszteletére 2023-at az UNESCO jóváhagyásával Bolyai-emlékévvé nyilvánították.

A levél túlnyomó, a binomiális tétellel és binomiális sorral foglalkozó része számunkra most kevésbé lényeges. A legfontosabb szakasz a levél végén található, amit szöveghűen, az aláhúzásokat is megőrizve igyekszünk közölni:

> *„A' fel-tételem már áll, hogy mihelyt rendbe szedem, el-készitem, 's mód leszsz, a' parallelákrol egy múnkát adok ki; ebbe a' pillanatba <u>nints</u> kitalálva, de az az út, mellyen mentem, tsaknem bizonyoson igérte a' tzél el-érésit, ha az egyébaránt lehetséges; nints meg, de ollyan felséges dolgokat hoztam ki, hogy magam el-bámultam, 's örökös kár volna elveszni; ha meg-látja Édes Apám, meg-esmeri; most többet nem szollhatok, tsak annyit: <u>hogy semmiből egy ujj más világot teremtettem</u>; mindaz, valamit eddig küldöttem, tsak kártyaház a' toronyhoz képpest. Meg-vagyok gyözödve, hogy nem sokkal fog kevesebb betsületemre szolgálni, mintha fel-találtam volna."*

A tartalom magyarázata, továbbá a címzett és a feladó bemutatása előtt megemlítjük még, hogy a levél megihlette Babits Mihályt is. Bolyai című szonettje 1911-ben jelent meg a Nyugat folyóiratban. Ennek mottója a temesvári levél leggyakrabban idézett része, ami visszaköszön a vers közepén, amennyiben „a semmiből alkottam uj világot, / mint pókhálóból sző kötélt a rab." Hamarosan pedig az is értelmet fog nyerni, mire utal az utolsó két sor, miszerint „nevetlek, mint Istennel osztozó / vén Euklides, rab törvényhozó."

Az abszolút geometria és két fajtája: az euklideszi és a hiperbolikus geometria

Mindenekelőtt szeretnénk képet adni arról, hogy mi is ez a Bolyai János által felfedezett új, más világ. Ezt igyekszünk minél kevesebb előismeretre építkezve

---

[1] A cikk a KLTE Baráti Köre Egyesület 2023. október 26-ai rendezvényén elhangzott előadás válogatott részei alapján készült.

megtenni, aminek követhetőségéhez elegendő az általános és középiskolai geometria egyszerűbb fogalmaival és állításaival tisztában lenni.

Az érettségi előtt elsajátítandó matematikai tananyag az úgynevezett euklideszi geometriával foglalkozik, melynek tanítása során több alkalommal hagyatkoznak a szemléletre. Ez rendben is van így, elegendő a tanárnak tisztában lenni azzal, hogy mikor és hol történik ilyesmi.

A matematika valamely ágának felsőbb szinten oktatott, mai értelemben precíznek tekintett felépítése az axiomatikus módszerrel történik, amit az euklideszi (sík)geometrián keresztül fogunk vázlatosan bemutatni.[2] Az euklideszi geometriának többféle, különböző alapelveken nyugvó axiómarendszere ismert, melyek közül a Hilbert német matematikus nevéhez fűződő utat választjuk.

Az axiomatikus felépítéshez először is szükségünk van néhány alapfogalomra; ezek olyan fogalmak, amelyeket nem definiálunk. Az euklideszi geometria esetén ezek a következők:

- pont,
- egyenes,
- egy pont illeszkedik egy egyenesre,
- egy pont másik két pont között van,
- két szakasz azonos hosszúságú,
- két szög azonos nagyságú.[3]

Ezt követően vannak definiálható fogalmak, amelyeket az alapfogalmakra építve vezethetünk be. Az euklideszi geometria esetén olyanokra kell gondolni, mint például

- szakasz (két pont és a közöttük lévő pontok összessége),
- félegyenes (két pont által meghatározott szakasz kiegészítve azokkal a pontokkal, melyekre teljesül, hogy a második pont az első és e között a pont között van),
- szög (két közös kezdőpontú félegyenes együttese),
- háromszög (három, egy egyenesre nem illeszkedő pont által meghatározott három szakasz együttese),
- merőleges egyenesek (két metsző egyenes, melyek metszéspontjánál keletkező szögek azonos nagyságúak; az ilyenkor keletkező szöget derékszögnek hívjuk),

[2] A továbbiakban az egyszerűség kedvéért kizárólag síkgeometriában gondolkodunk, a térgeometriára mindössze pár helyen fogunk utalást tenni. Természetesen itt a síkgeometria esetén sem törekszünk teljes tárgyalásra, az axiomatikus gondolkodásmód bemutatása és a későbbiek előkészítése a célunk.

[3] Az utóbbi négy valójában inkább alapreláció, de itt ilyen fokú megkülönböztetésekbe nem kívánunk belemenni. Ha síkgeometria helyett térgeometriával foglalkoznánk, akkor alapfogalom lenne még a sík, valamint az illeszkedés például egy pont és egy sík között.

- párhuzamos egyenesek (két különböző egyenes, melyeknek nincs közös pontjuk),
- egybevágó háromszögek (két háromszög, melyek csúcsai között létesíthető olyan megfeleltetés, hogy a megfelelő oldalak azonos hosszúságúak, a megfelelő szögek pedig azonos nagyságúak).[4]

Az axiomatikus felépítés kulcsfontosságú eleme megfogalmazni olyan alapállításokat, melyeket bizonyítás nélkül elfogadunk, ezeket axiómáknak nevezzük. Az euklideszi geometria Hilbert-féle axiómarendszere 15 axiómából áll, melyeket öt csoportba szokás sorolni: illeszkedési, rendezési, egybevágósági, folytonossági és párhuzamossági axiómák.[5] Ezek közül most csak néhányat mutatunk be:

- Két különböző pontra illeszkedik egy és csak egy egyenes.
- Ha a Q pont a P és R pontok között van, akkor ezek egy egyenesre illeszkednek, továbbá a Q pont az R és P pontok között van.
- Ha a Q pont a P és R pontok között van, a Q' pont pedig a P' és R' pontok között van, továbbá a $\overline{PQ}$ és $\overline{P'Q'}$ szakaszok, illetve a $\overline{QR}$ és $\overline{Q'R'}$ szakaszok azonos hosszúságúak, akkor a $\overline{PR}$ és $\overline{P'R'}$ szakaszok is azonos hosszúságúak.
- Ha egy egyenes nem illeszkedik egy háromszög egyik csúcsára sem, de metszi valamelyik oldalát, akkor metszi egy további oldalát is.
- Ha két háromszög két-két oldala azonos hosszúságú és az ezek által közbezárt szögek azonos nagyságúak, akkor a további két-két megfelelő szögük is azonos nagyságú.

Folytathatnánk a sort, utolsóként ide tartozik az euklideszi párhuzamossági axióma is, amire Euklidész V. posztulátumaként hamarosan vissza fogunk még térni.

Végül következnek a bizonyítható tételek, amelyeket az axiómákból kiindulva, matematikailag helytálló érveléssel tudunk igazolni. Ezek közül is megemlítünk néhányat:

- Egy egyenes nem metszheti egy háromszög mindhárom oldalát.
- Egy és csak egy egyenes létezik, amely illeszkedik egy adott pontra és merőleges egy adott egyenesre.
- Pons asinorum (szamarak hídja):[6] Egyenlő szárú háromszögben az azonos hosszúságú oldalakkal szemközti szögek azonos nagyságúak.

---

[4] Nem okoz zavart, hogy az utolsó két alapfogalomnál megjelenik a szakasz, illetve a szög kifejezés, ugyanis ezek a fogalmak a többi alapfogalom segítségével definiálhatók.

[5] A térgeometria esetén a Hilbert-féle axiómák száma 20-ra nő.

[6] Az elnevezésnek kétféle magyarázatát szokták adni. Egyrészt a tétel egyik lehetséges bizonyításához készíthető ábra egy hídra emlékeztet. Másfelől ez az egyik első olyan tétel, melynél a bizonyítás, még inkább a bizonyítás szükségszerűségének átlátásához már kell

- Háromszögek egybevágósági alapesetei, például: Ha két háromszög oldalai páronként azonos hosszúságúak, akkor a két háromszög egybevágó.
- Háromszög-egyenlőtlenség: Egy háromszög bármelyik oldalának hossza kisebb, mint a másik két oldal hosszának összege.

Az axiomatikus gondolkodásnak a geometriában komoly előzményei vannak. I. e. 300 körül írta meg Euklidész Elemek (görögül Sztoikheia) című munkáját, amelyben összefoglalta korának legjelentősebb matematikai ismereteit. Fontos és több szempontból meghatározó műről van szó, amelyet az idők során számos nyelven megjelentettek, magyarra hárman fordították le: Brassai Sámuel (1865), Baumgartner Alajos (1905) és Mayer Gyula (1983). Az Elemek felépítése, rendszerezettsége egészen előremutató, különösképpen ha összevetjük azzal, hogy a bizonyítások iránti ilyen fokú igény a későbbi korokban sem mindig volt jellemző. Mai szemmel nézve azért természetesen lehet benne kivetnivalót találni, de ez nem von le semmit az érdemeiből és értékeiből.

A geometria megalapozását tekintve az Elemek első könyve kiemelt fontosságú. Alapfogalmakról ugyan még nincs szó, például a definíciók között a pontot is megpróbálja értelmezni mint azt, aminek nincs része. Majd a tételeket megelőzően posztulátumokat és axiómákat különböztet meg, amiket ma már nem választanánk így ketté. Az Euklidész-féle különbségtételre talán jobban rávilágít, hogy Brassai a posztulátumokat kívánatoknak, az axiómákat pedig közeszméknek fordította.

Itt szerepel az V. posztulátum, amit mindhárom fordításban megadunk, ugyanis érdekesen érzékelteti a magyar matematikai szaknyelv változásait:

- És hogy ha két egyent úgy vág keresztül egy egyen, hogy az azonegyfelőli belső szegleteket két deréknél kisebbé teszi, a két egyen határtalanul kinyújtva összeérjen affelé, melyről a két deréknél kisebb szegletek vannak. *(Brassai Sámuel fordítása)*
- És ha két egyenest metsző egyenes ugyanazon az oldalán két derékszögnél kisebb belső szögeket alkot, a két egyenes határtalanul meghosszabbítva, azon az oldalon találkozik, melyen a szögek két derékszögnél kisebbek. *(Baumgartner Alajos fordítása)*
- És hogy ha két egyenest úgy metsz egy egyenes, hogy az egyik oldalon keletkező belső szögek (összegben) két derékszögnél kisebbek, akkor a két egyenes végtelenül meghosszabbítva találkozzék azon az oldalon, amerre az (összegben) két derékszögnél kisebb szögek vannak. *(Mayer Gyula fordítása)*

---

egyfajta matematikai gondolkodásmód, ezáltal ez jelentheti a hidat a további, komolyabb tételek megértése felé.

Tekintettel arra, hogy az V. posztulátum tartalmilag és megfogalmazásban is jóval bonyolultabb a többinél, sokáig arra gyanakodtak, hogy tételként levezethető a többi axiómából.[7] Több matematikus nevéhez fűződnek ilyen irányú próbálkozások, közülük Saccheri, Lambert, Legendre, Schweikart és Taurinus nevét szokás kiemelni, akik (ahogyan látni fogjuk) nem járhattak sikerrel, de munkájukkal az euklideszitől eltérő geometria előfutárainak tekinthetők.

Bolyai János és Lobacsevszkij érdeme, hogy rájöttek, Euklidész V. posztulátumának elvetésével, illetve annak ellenében is lehet geometriai vizsgálatokat folytatni. Ennek megfelelően többféle geometriát különböztethetünk meg: Abszolút geometriáról van szó, ha teljesíti a fentiekben felvázolt axiómarendszert az V. posztulátum nélkül. Ha az abszolút geometriát ellátjuk az V. posztulátummal, akkor euklideszi geometriáról, ha pedig nem teljesül az V. posztulátum, akkor hiperbolikus vagy Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometriáról beszélünk. A két Bolyai, Lobacsevszkij, valamint Gauss e témában betöltött szerepére a továbbiakban még visszatérünk.

Azok a tételek, melyeket az V. posztulátum nélkül tudunk igazolni, „abszolút igazak", így az abszolút geometriához tartoznak, ezáltal érvényesek mind az euklideszi, mind a hiperbolikus geometriában. A korábbiakban kimondott tételek mindegyike ilyen volt.

Most néhány jól ismert euklideszi tételen keresztül mutatunk be különbözőségeket az euklideszi és a hiperbolikus geometria között:

- Az euklideszi geometriában egy egyenessel egy rá nem illeszkedő ponton keresztül egy és csak egy párhuzamos egyenes húzható, míg a hiperbolikus geometriában végtelen sok.
- Az euklideszi geometriában minden háromszög szögeinek összege 180° (szögmérés nélkül úgy szokás fogalmazni, hogy két derékszög összegével egyenlő), míg a hiperbolikus geometriában kisebb 180°-nál (ráadásul mindenféle 180°-nál kisebb szögösszeg előfordulhat).
- Az euklideszi geometriában vannak nem egybevágó háromszögek, melyek szögei páronként azonos nagyságúak. Ezzel szemben a hiperbolikus geometriában ha két háromszög szögei páronként azonos nagyságúak, akkor a két háromszög egybevágó. (Röviden fogalmazva tehát az euklideszi geometriában vannak hasonló, de nem egybevágó háromszögek, míg a hiperbolikus geometriában nincsenek.)
- Az euklideszi geometriában létezik akármekkora területű háromszög, a hiperbolikus geometriában azonban a háromszögek területe felülről

[7] Megjegyezzük, hogy eredetileg Hilbert axiómarendszere is eggyel több axiómából állt, de később megmutatták, hogy egyik axiómája felesleges, az ugyanis a többiből levezethető.

korlátozva van (sőt az is teljesül, hogy a terület egyenesen arányos a szögek összegének 180°-hoz képesti hiányával).

És sorolhatnánk tovább, talán azt említjük még meg, hogy a közismert Pitagorasz-tétel csak az euklideszi geometriában érvényes.

Végül a hiperbolikus geometria ellentmondás-mentességéről ejtünk pár szót, amely kérdés csak később, már Bolyai és Lobacsevszkij halálát követően került tisztázásra. Beltrami volt az, aki a vontatási görbe (traktrix) vezéregyenese körüli forgatásával keletkező, pszeudoszféra nevű felületen először konstruált modelljét a hiperbolikus síknak.[8] Később ennél egyszerűbben bemutatható modellek is születtek: a Cayley–Klein-modell (a „pontok” egy euklideszi körlap belső pontjai, az „egyenesek” a kör végpont nélküli húrjai), a Poincaré-féle körmodell (a „pontok” ugyancsak egy euklideszi körlap belső pontjai, az „egyenesek” a kör végpont nélküli átmérői, illetve az olyan végpont nélküli körívek, melyek merőlegesen metszik az eredeti kört, azaz metszéspontjukban az érintők merőlegesek egymásra) vagy a Poincaré-féle félsíkmodell (a „pontok” egy euklideszi nyílt félsík pontjai, az „egyenesek” a félsík határegyenesére merőleges végpont nélküli félegyenesek, illetve az olyan végpont nélküli félkörívek, melyek középpontja a félsík határegyenesén található).[9]

Talán furcsának tűnhet, hogy a fenti modellek mindegyikét az euklideszi geometrián belül adtuk meg, de ez matematikailag azt jelenti, hogy a hiperbolikus geometria ellentmondásmentes, amennyiben az euklideszi geometria ellentmondásmentes.

Bolyai Farkas életútja

Bolyai Farkas 1775-ben Bólyán született elszegényedett nemesi családba, Bolyai Gáspár és pávai Vajna Krisztina gyerekeként.

Tanulmányait a nagyenyedi kollégiumban kezdte, majd báró Kemény Simon felfogadta a kiemelkedő képességű diákot fia mellé tanulótársnak. Ennek köszönhetően került először a kolozsvári kollégiumba, egy rövid ideig Jénába, 1796 és 1799 között pedig a göttingeni egyetemre. Ez az időszak meghatározó volt életében, a mi szempontunkból két elemet érdemes kiemelnünk. Hatással lehetett érdeklődésére a tanárai közé tartozó Kästner professzor, aki az V. posztulátummal kapcsolatos addigi vizsgálatok egyik legjobb ismerője volt. Másrészt összebarátkozott a szintén itt tanuló Carl Friedrich Gauss-szal, aki később a legjelesebb matematikusok közé emelkedett, és akivel a későbbi évtizedekben is tartották a kapcsolatot, változó gyakorisággal váltottak leveleket.

Hazatérését követően Kolozsváron megismerte, 1801-ben pedig feleségül vette árkosi Benkő Zsuzsannát, akitől két gyereke született: 1802-ben János és a

[8] Bolyai János születésének 200. évfordulója kapcsán emiatt állítottak Marosvásárhelyen egy pszeudoszférát ábrázoló szobrot.

[9] A Poincaré-féle körmodell ihlette Escher Circle Limit című fametszeteit.

mindössze pár évet megélt Anna. Eleinte Domáldon gazdálkodott, 1804-től pedig a marosvásárhelyi kollégium matematika–fizika–kémia szakos tanára lett közel négy évtizeden át.

Bolyai Farkast is foglalkoztatta az V. posztulátum bizonyítása. A Theoria Parallelarum (A párhuzamosok elmélete) című kéziratát 1804-ben elküldte Gaussnak, aki válaszlevelében rámutatott a gondolatmenet hibájára. 1808-ban próbálkozott ennek kiegészítésével, erre a munkájára azonban már nem érkezett válasz Gausstól.

1821-ben megözvegyült, 1824-ben újra megházasodott. Második felesége somorjai Nagy Terézia, aki 1833-ban meghalt. Két közös gyerekük született: 1826-ban Gergely és egy szintén kisgyerekként elhunyt lány, Berta.

1830-ban jelent meg Az arithmetica eleje című, magyar nyelven írt könyve. Ennek köszönhetően választották 1832-ben a Magyar Tudós Társaság (ezt nevezték át később Magyar Tudományos Akadémiára) levelező tagjává.

Legjelentősebb műve a kétkötetes Tentamen 1832-ből és 1833-ból.[10] Ebben az akkori értelemben vett aritmetikai és geometriai témákkal, a mai matematika több különböző területével foglalkozott. Egyebek mellett összegyűjtött az V. posztulátumot helyettesítő (azzal ekvivalens, matematikailag egyenértékű) axiómákat, ezt egészítette ki egy későbbi munkájában még a következővel: minden háromszögnek van körülírt köre. De saját eredményeként szerepel benne gyökközelítő eljárása, konvergenciakritériuma, valamint legismertebb tétele, ami mind a mai napig viseli a nevét: Ha két sokszög egyenlő területű, akkor az egyiket fel lehet darabolni véges sok olyan kis sokszögre, melyekből eltolás és elforgatás után össze lehet állítani a másikat.

Bolyai Farkast nyugodtan nevezhetjük polihisztornak, hiszen a matematika és másik két szaktárgya mellett foglalkozott irodalommal (írt drámákat, műfordításokat), festett, készített kemencét, de fennmaradtak zeneelméleti, néprajzi, kertészeti és erdészeti munkái is (egy alkalommal még egy erdészeti állásra is pályázott).

1851-ben vonult nyugdíjba, majd 1856-ban halt meg Marosvásárhelyen.

Bolyai János életútja

Ahogyan édesapjánál már említettük, Bolyai János 1802-ben született Kolozsváron, anyai nagyszülei házában.

Egy ideig otthon taníttatták, tanították, később iratkozott csak be a marosvásárhelyi kollégiumba. Szerették volna, hogy Göttingenben folytathassa tanulmányait, de a Gaussnak küldött, szerencsétlenül megfogalmazott kérdéseket tartalmazó levél válasz nélkül maradt. Anyagi okokból egy évig még a

[10] A latin nyelvű Tentamen teljes címének magyar fordítása: Kísérlet a tanulóifjúságot a tiszta matematika elemeibe és a magasabb fejezeteibe szemléletes és éppen ezért közérthető módon bevezetni.

marosvásárhelyi bölcsészeti karra járt, majd 1818-tól 1822-ig Bécsbe, a császári és királyi hadmérnöki akadémiára került. Itt a legkiválóbbak egyikeként további egy évet maradhatott.

Már bécsi évei alatt foglalkozott az V. posztulátum kérdésével, eleinte ő is annak bizonyításában gondolkodott. Egy 1820-as levelében édesapja óva inti ettől, és igen hosszan kérleli, hogy hagyjon békét a paralleláknak, azaz a párhuzamosoknak. Ebből az időszakból meg szoktak említeni négy olyan, a jegyzeteiben fellelhető ábrát, amelyek akár utalhatnak arra, hogy már ekkoriban elindulhatott az újfajta geometria irányába.

1823-ban a temesvári erődítési igazgatósághoz nevezték ki alhadnagyként. Innen írta édesapjának a cikk elején idézett levelet, amely az első írásos nyoma annak, hogy felfedezett valami újat, valami jelentőset. Ugyanakkor az is olvasható, hogy még nincs teljesen készen, nem lehet tehát tudni, mennyire voltak ekkor kidolgozva a gondolatai.

1826-ban Aradra helyezték át, ahol Wolter von Eckwehr, egykori bécsi tanára lett a parancsnoka. Geometriai eredményeiről átadott neki egy kéziratot, melynek későbbi sorsáról nincs információnk.

Mielőtt 1831-ben elfoglalta új állomáshelyét Lembergben, meglátogatta édesapját, akinek ösztönzésére írásba foglalta az abszolút és a hiperbolikus geometriával kapcsolatos tudományos eredményeit. A latin nyelvű értekezés teljes címe: A tér abszolút igaz tudománya a XI. Euklidész-féle axióma (a priori soha el nem dönthető) helyes, vagy téves voltától független tárgyalásban: annak téves volta esetére, a kör geometriai négyszögesítésével.[11] Ennek ellenére közkeletű nevén lényegében mindenütt Appendixként emlegetik, aminek magyarázata, hogy Bolyai Farkas Tentamenjének 1832-es első kötetében függelékként jelent meg. János dolgozatának különlenyomata már 1831-ben kijött a nyomdából, amit kétszer is elküldtek véleményezésre Gaussnak, elsőre a melléklet valamilyen okból nem ért célba. Gauss válaszában azt írta, nem dicsérheti a munkát, mert akkor magát kellene dicsérnie, ő ugyanis korábban ugyanezekre az eredményekre jutott. Kifejtette, hogy fogadóképes közönség híján életében nem akart erről semmit sem nyilvánosságra hozni, de szándékában állt papírra vetni, hogy ne szálljon vele a sírba. Azért egy kevés dicséret is található benne, amikor örömét fejezte ki, hogy éppen barátjának fia kímélte meg ettől a feladattól, később pedig röviden nagyrabecsüléséről biztosította. Ekkortájt azonban írt egy hasonló tartalmú levelet Gerlingnek a Magyarországról kapott műről, amiben a fiatal Bolyait már elsőrangú lángésznek nevezte. Az Appendix egy eredeti példánya egyébként 2009-ben felkerült az UNESCO Világemlékezet listájára.

Utoljára, 1832-ben Olmützbe vezényelték, útközben ráadásul balesetet szenvedett. Szabadságot szeretett volna kérni geometriai kutatásainak

[11] Az Elemek néhány régebbi, külföldi kiadásában az V. posztulátumot áthelyezték az axiómák közé 11-es sorszámmal, erre utal a címben szereplő XI. axióma.

folytatásához, de az engedélyt nem kapta meg. Időközben a ranglétrán előrehaladva főhadnagy, majd százados lett, viszont egyre többet betegeskedett. Végül 1833-ban félig rokkanttá nyilvánították, és kapitányi rendfokozatban nyugállományba helyezték.

Rövid marosvásárhelyi tartózkodást követően, 1834-ben Domáldra került. Ekkortól élt együtt kibédi Orbán Rozáliával, de a katonatisztektől elvárt kaució híján nem tudta feleségül venni. 1846-ban végleg Marosvásárhelyre költöztek.

A Habsburg-ház trónfosztását követően, 1849 májusában tudtak csak összeházasodni, amit azonban a szabadságharc bukása után nem ismertek el. Részben a nyugdíja megtartása érdekében 1852-ben felbontották a házasságot. A pár kapcsolata amúgy is meglehetősen zűrösnek mondható. A Bolyai családdal kapcsolatos kutatások alapján tudjuk, hogy Orbán Rozáliának négy gyereke született, három még az esküvő előtt, egy pedig a válásukat követően: Dénes 1837-ben, Amália 1840-ben, Klára Eliza 1844-ben és Gyula 1855-ben. Abban viszont nem lehetünk maradéktalanul biztosak, hogy közülük hánynak volt Bolyai János az édesapja, hiszen például az elsőszülött esetén is egymásnak ellentmondó nyilatkozatokat vezettetett be a keresztelési anyakönyvbe.

Tévedés lenne azt hinni, hogy Bolyai János érdeklődési területe kizárólag a geometriára korlátozódott. A lipcsei Jablonowski Társaság pályázatára 1837-ben benyújtott munkája a Responsio, amiben a felhívásnak megfelelően a komplex számokkal kapcsolatos kérdésekkel foglalkozott.[12] De hagyatékának későbbi feldolgozása során találtak más, egyebek mellett algebrai és számelméleti vizsgálatokra vonatkozó feljegyzéseket is.

Bolyai János 1860-ban, lényegében magányosan hunyt el Marosvásárhelyen. Ugyan a halotti anyakönyvben szerepel utalás arra, hogy nagy elméjű matematikus volt, temetése szerény körülmények között, kevés gyászoló részvételével zajlott. 1911-ben édesapjával együtt újratemették, azóta nyugszanak méltóbb, közös sírban.

Néhány további gondolat a Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometria történetéhez

A Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometria kapcsán felmerülhet a kérdés, hogy a két névadó közül melyiküket illeti az elsőség, valamint az eddigiek alapján az is, hogy Gauss vajon meddig juthatott el a hiperbolikus geometria felfedezésében.

Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij (1792–1856) teljes életútját nem kívánjuk ismertetni, csak a hiperbolikus geometria felfedezése kapcsán fontos állomásokat soroljuk fel. Lehet tudni egy 1826-ban tartott, témába vágó előadásáról, ennek részletei azonban nem maradtak fenn. Legjelentősebb, a hiperbolikus geometriára vonatkozó eredményeiről szóló publikációja 1829-ben jelent meg orosz nyelven

[12] Rajta kívül még ketten vettek részt a pályázaton: Bolyai Farkas és a debreceni Kerekes Ferenc. A dolgozatok ismerői szerint Bolyai Jánosé a legértékesebb szakmailag, ennek ellenére kizárólag Kerekest jutalmazták a pályadíj felével.

egy kazanyi folyóiratban, amit 1840-ben németre fordítva is közzétett. Életében neki sem jutott sok elismerés, bár őt Gauss legalább megválasztatta a Göttingeni Tudós Társaság levelező tagjává. 1848-ban munkája eljutott Bolyaiékhoz, akik észrevételeket fűztek hozzá, és János ugyan eleinte bizalmatlanul fogadta, végül is pozitív véleménnyel volt róla.

Ha ezeket az adatokat összevetjük a Bolyai János életútjánál olvasható évszámokkal, akkor arra jutunk, hogy az elsőség kérdését nem lehet minden kétséget kizáróan eldönteni. Nem is feltétlenül van erre szükség, hiszen lényegében egy időben, egymástól függetlenül jutottak el a hiperbolikus geometriához, ezért teljes mértékben indokolt azt a kettejük neve alatt említeni.

Áttérve Gaussra, a különböző matematikusokkal folytatott levelezéseiből és fennmaradt jegyzeteiből tudható, hogy ismerte a témába vágó eredményeket, valamint ő maga is foglalkozott a kérdéskörrel. Bizonyosan voltak a hiperbolikus geometria irányába mutató meglátásai, az viszont nem derül ki, hogy Bolyaihoz és Lobacsevszkijhez hasonló mélységben kidolgozta-e azokat, mivel sosem publikált a témában. A miértre nehéz választ adni, talán tartott az euklideszi szemlélettel szembemenő geometriai észrevételek kritikus, de legalábbis értetlen fogadtatásától. A mi szempontunkból megállapítható, hogy életében nem sokat tett Bolyai János és az Appendixben közölt eredményeinek elismertetéséért, ugyanakkor látni fogjuk, hogy közvetve mégiscsak volt szerepe abban, hogy az utókor megismerhette a magyar matematikus nevét és munkáját.

Bolyai Farkas és Bolyai János elismertsége

Bolyai Farkas és különösképpen Bolyai János utóéletének bemutatását a határainkon kívül kell kezdenünk, azután térhetünk csak át a magyarországi történésekre, ugyanis idehaza a külföldi érdeklődés keltette fel irántuk a figyelmet.

Miután Gauss 1855-ben elhunyt, megkezdték hagyatékának feldolgozását. Ehhez a munkához értékes dokumentumokkal járult hozzá Bolyai Farkas, aki még halála előtt eljuttatta Göttingenbe, Sartorius von Waltershausen részére a Gausstól kapott leveleit.

A két Bolyai matematikai tevékenységére először Baltzer figyelt fel, aki A matematika elemei című, német nyelvű könyvének második kiadásában foglalkozott is velük. Ennek hatására 1867–68-ban megjelent az Appendix franciául Hoüel, olaszul pedig Battaglini fordításában. Hoüel később is nagy figyelemmel kísérte a Bolyai-kutatások állását, több alkalommal fogalmazott meg kritikát a magyarok részéről tapasztalt érdektelenség, nem megfelelő segítőkészség vagy a dolgok lassú előrehaladása miatt.

Meg kell említeni, hogy Frischauf már 1871-től olyan előadásokat tartott Grazban, ahol az Appendixet követve, Bolyai János szerint mutatta be az abszolút geometriát, ennek anyagát pedig 1872-ben könyv formájában is közzétette.

Angol nyelvterületen először 1878-ban bukkant fel a Bolyai név az amerikai Halsted nemeuklideszi geometriai bibliográfiájában. Neki köszönhető az Appendix 1891-ben megszületett angol nyelvű fordítása. Sokat tett annak elismertetéséért, hogy a világ Bolyai Jánost a hiperbolikus geometria egyik felfedezőjeként tartsa számon. Érdeklődésének komolyságát mutatja, hogy 1896-ban hazánkba, egyebek közt Marosvásárhelyre is ellátogatott.

A Bolyaiak örökségével kapcsolatos kutatások fontos alakja volt még Stäckel, akinek 1913-ban németül, majd 1914-ben magyarul is megjelent, Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai című kétkötetes munkája a mai napig alapműnek számít.

Magyarországon Schmidt Ferenc tekinthető a Bolyai-kutatások úttörőjének. Hoüellel eredetileg más okból folytatott levelezést, az ő biztatására kezdett évtizedeken át tartó, fáradhatatlan gyűjtőmunkába. Neki köszönhetők az első Bolyai-életrajzok, amelyek 1867-ben jelentek meg francia és német nyelven.

Az Appendix francia és olasz változatának híre eljutott a Magyar Tudományos Akadémiához. Ráadásul 1869-ben Boncompagni olasz tudománytörténész levelet írt Eötvös József akkori MTA-elnöknek és kultuszminiszternek, amiben a Bolyai-ügy állásáról kért tájékoztatást. Eötvöst igencsak meglepte a dolog, ekkor írta fiának, Lorándnak, hogy egyszerre örült és szomorodott el, hiszen nem tudta eldönteni, hogy büszkének lenni vagy pirulni kellene miatta.

Ezeknek annyi következménye mindenképpen lett, hogy az akadémia elkérte a Marosvásárhelyen őrzött Bolyai-hagyatékot, átvizsgálására bizottságot állított fel, de a 25 évig húzódó munka kevés eredménnyel zárult. A legaktívabb tag Schmidt Ferenc volt, akinek családja is bekapcsolódott az iratok átolvasásába. Fia, Schmidt Márton bukkant rá 1884-ben a temesvári levélre.

Magyarországon Vályi Gyula, a kolozsvári egyetem professzora volt az első, aki az 1890-es évek elejétől kezdve rendszeresen tartott kurzusokat az Appendix alapján.

Egy idő után felgyorsultak az események. 1897-ben mindjárt két magyar fordítása is született az Appendixnek Rados Ignác és Suták József jóvoltából. 1897-ben és 1904-ben megjelent a Tentamen két kötetének második kiadása, az Appendix ezúttal a második kötetbe került. 1899-ben pedig német–magyar együttműködésben, Schmidt Ferenc és Stäckel szerkesztésében kiadták Bolyai Farkas és Gauss levelezését is.

A korai Bolyai-életrajzok még sokszor támaszkodtak ellenőrizetlen szóbeli közlésekre, mendemondákra, emiatt tartalmaznak pontatlanságokat vagy azóta valótlannak bizonyult információkat. Áttételesen ennek köszönhető, hogy a szélesebb közönség is tévesen ismerte meg Bolyaiékat, ugyanis több róluk szóló dráma és regény éppen ezeket a kissé hatásvadász elemeket ragadta meg. Számos kutató áldozatkész munkájának köszönhetően ma már sokkal pontosabb a tudásunk mind az életüket, mind a munkásságukat illetően.[13]

1903-ban Kolozsváron nagyszabású ünnepséget rendeztek Bolyai János születésének 100. évfordulója alkalmából, azóta minden Bolyai-évfordulón méltó megemlékezéseket szoktak tartani. Egy 1977-es emlékülésen mondta Szentágothai János, az MTA akkori elnöke a következőket: „A magyar nép géniusza – a tudomány területén – legmagasabb fokon Bolyai Jánosban öltött testet."

Irodalomjegyzék

A két Bolyai minden bizonnyal a tudománytörténet legtöbbet kutatott magyar matematikusai. Ennek megfelelően a témával foglalkozó cikkeket, könyveket keresgélve a bőség zavarával találjuk magunkat szembe. Ebből a széles választékból ajánlunk a Bolyaiak életét és munkásságát bemutató néhány könyvet, valamint összefoglaló munkát az érdeklődők figyelmébe, melyek bőségesen tartalmaznak további hivatkozásokat is.

- Bolyai János: Appendix. A tér tudománya (szerk.: Kárteszi Ferenc), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1977.
- Dániel Gáborné: „Az igazságot… határtalanul szeretem". Annotált ajánló bibliográfia Bolyai Jánosról, Bolyai János Katonai Műszaki Főiskola, Budapest, 1998.
- Dávid Lajos: Bolyai-geometria az Appendix alapján, Bolyai János Katonai Műszaki Főiskola, [1991].
- Gazda István (szerk.): Egy halhatatlan erdélyi tudós, Bolyai Farkas, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2002.
- Szénássy Barna: Bolyai Farkas (1775–1856), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1975.
- Szénássy Barna: Bolyai János, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1978.
- Bolyai Farkas és Carl Friedrich Gauss levelezése, Bolyai Kiadó, Better Kiadó, MTA Könyvtár és Információs Központ, Budapest, 2015.
- Természet Világa, Bolyai-emlékszám, I. különszám, 2003.

[13] Nem áll módunkban itt mindenkit felsorolni, mindössze két debreceni kötődésű Bolyai-kutatót, Dávid Lajost és Szénássy Barnát említünk meg név szerint.