„A semmiből egy új, más világot teremtettem”

Hogyan értette ezt Bolyai János 200 évvel ezelőtt?

Gaál Botond

teológus, matematika-fizika szakos tanár, Debreceni Református Hittudományi Egyetem

Bevezető gondolatok

A 2023. esztendőben kivételesen sok jubileumunk volt. Elég csak Csokonaira, Petőfire, Madáchra gondolni, vagy Gróf Andrássy Gyulára és kiemelten a nemzeti imádságunk, a *Himnusz*unk megszületésére. Kölcsey Ferenc, a Debreceni Református Kollégium neveltje 1823. január 22-én tett pontot *A magyar nép zivataros századaiból* alcímmel írt költeménye végére Szatmárcsekén. Nincs még egy olyan vers, amely az elmúlt 200 év alatt a magyarságot ilyen mélyen megszólító lélekverssé vált volna. Van azonban ebben az évben még egy rendkívüli, sőt világraszóló matematikai évfordulós esemény is, amely szerényen húzódik meg az ünneplések sorában. Bolyai János, a Marosvásárhelyi Református Kollégium egyik kitűnő diákja is éppen 200 éve rengette meg a matematika alapjait, és ezzel új fejlődési pályára állította e diszciplínát. Őt a világon valaha élt jelentős matematikusok között a tíz legnagyobb lángelme közé sorolják. Bolyai matematikai modellváltására emlékezve a hazai neves jubileumokhoz mi is csatlakozni kívánunk. A Magyar Tudomány Ünnepe kapcsán szeretnénk ezt az új szemléletű eredményt méltatni. Pontosan 20 évvel ezelőtt vált hivatalossá a Széchenyihez köthető november 3-i dátum, az MTA alapítása 1825-ben. Két évvel korábban, de pontosan ehhez az időponthoz kötődik a mi emlékezésünk is. Összefoglaljuk, milyen különös és jelentős tudományelméleti esemény történt akkor.

A modellváltást előkészítő események

Egy 2100 éves időszak lezárását jelzi a címnek[1] választott mondat, melyet Bolyai János az édesapjához írt levelében fogalmazott meg 1823. november 3-án. Hosszú tehát a történet. Előbb vissza kell mennünk Eukleidész[2] *Elemek* című művéhez,

---

[1] Az alább következő tanulmány törzsrésze megjelent *Gaál Botond: A zárt világ felnyitása* című könyvében. DRHE, Hatvani István Teológiai Kutatóközpont, Debrecen, 2007. 69–78.

[2] A neves ókori matematikus neve görögül valóban Eukleidész. Általában a nemzeti fordítások, így a magyar is a latin fordítások révén az Euklidész nevet választották. Manap-

amelyben Kr. e. 300 körül összefoglalta az addigi matematikát, és lefektette annak axiomatikus alapjait. Leginkább szembetűnő volt a geometria axiómarendszerében a 11. axióma.[3] Ez a 11. axióma meglehetősen makacs problémának bizonyult.[4] Már a 4. és 5. században is, Theonnak és Proklosznak komoly fejtörést okozott a hovatartozása. Ők voltak annak a két évszázadnak a legjobb matematikusai. A gond az volt, hogy valójában tétel jellege van, amit be kellene/lehetne bizonyítani, s ez sokakban keltett gyanút. Hátha nem is axióma?! Prékopa András matematikus megemlíti, hogy Proklosz szerint már magát Ptolemaioszt is foglalkoztatta ez a kérdés a 2. században, aztán a 9. századi arab tudós, Al-Nirizi pedig kommentárokat írt Euklidész egész első könyvéhez, Naszir Eddin (1201-1279) pedig a következő szellemes átfogalmazását adta a 11. axiómának: „ha egy görbe minden pontja egyenlő távolságra van egy adott egyenestől, akkor ez a görbe maga is egyenes”.[5] Végül Bolyai Jánosnak és Nyikoláj Lobacsevszkijnek sikerült

ság sokan választják a hivatalosan is elfogadott Eukleidész formát, mások viszont megmaradtak az Euklidész alaknál, mert a magyar szószármazékok is erre vezethetők vissza, pl. euklideszi geometria stb. Mi is inkább ezt a formát fogjuk használni.

[3] Itt nem részletezzük ezt az axiómarendszert. A történeti és elvi részletek megtalálhatók Gaál Botond*: A zárt világ felnyitása,* i.m. 35–49. oldalakon. Annyit azonban el kell mondanunk, hogy az Alexandriában dolgozó Euklidész (Eukleidész) *Elemek* című eredeti műve elveszett, tartalmát viszont a gondos és éles elmék a fejükben őrizték nemzedékeken át. Időszámításunk után a 4. században egy Theon nevű matematikus lejegyezte, és mivel ez is elveszett, egy Proklosz nevű matematikus az 5. században újból leírta emlékezet alapján. Ezt a szöveget őrizték aztán meg az arab tudósok, és majdnem ezer év után az arab és latin fordítások alapján, majd pedig az újból előkerült Theon és Proklosz által készített görög szöveg alapján készítettek egy immár jó latinsággal megírt változatot. Ezt 1482-ben Velencében adták ki, s ez szolgált az egész európai tudományos gondolkodás alapjául. Valószínűleg e könyv ismerete alapján vált általánossá a *more geometrico* kifejezés, amelyet attól kezdve a tudományművelés alapjának tekintettek, tehát minden tudományban érvényesíteni kellett a „*geometria módján*” elvet. Ekkor vette kezdetét Európában is az axiomatikus gondolkodás minden területen. A geometria volt a minta.

[4] Csupán arra hívjuk fel a figyelmet, hogy az elhíresült 11. axióma Euklidész művében még 5. posztulátumként szerepelt. Posztulátumnak a görögök azt tartották, amit eleve megkövetelünk általános elvként a vitában. Az axióma pedig olyan alaptételt jelent, amelyet a szemlélet alapján elfogadunk, és igaz voltát nem vitatva minden további állításunk bizonyításánál arra támaszkodunk. Mivel Euklidész eredeti 5. posztulátuma alaptételnek is tekinthető, sőt a 4. posztulátum is, ezért a későbbi korokban ezt a kettőt átsorolták a már meglévő 9 axióma utáni helyre. Így lett az ún. euklideszi axiómarendszer 11 tagú. Ezért szoktak olykor hivatkozni az 5. posztulátumra, ami igaz is, de valójában a 11. axiómáról van szó. Mi is 11. axiómaként említjük azt az elvi problémakört, amely Bolyai matematikai munkásságának fémjelzője. Magyar iskolákban párhuzamossági axiómának is nevezik. Bolyai Farkas ettől a „paralelláktól” óvta a fiát, nehogy sok időt „pazaroljon” rájuk.

[5] Prékopa András: Bolyai János forradalma. Természet világa. 2003. I. Különszám. 10.

megoldania a nagy kérdést. Az eseményt többen a matematika kopernikuszi fordulatának nevezik.[6] De mi történt Bolyai előtt?

A 11. axióma így szól: *Követeltessék meg, ... hogy ha két egyenest úgy metsz egy egyenes, hogy az egyik oldalon keletkező belső szögek (összegben) két derékszögnél kisebbek, akkor a két egyenes végtelenül meghosszabbítva találkozzék azon az oldalon, amerre az (összegben) két derékszögnél kisebb szögek vannak.*

Ez tényleg egyszerű állítás, de kissé bonyolult a megfogalmazása. Az az érzésünk támad, hogy ez valami bizonyítandó tétel, ezért foglalkoztatta oly sokáig a matematikusokat, talán másfél ezer éven át. Összefoglalóan azt mondhatjuk, hogy ennek az axiómának a vizsgálata két úton-módon történt. A matematikusok egyik része azt akarta igazolni, hogy ez az axióma – már talán Theon és Proklosz óta – a többi axióma és a posztulátumok logikai következménye. Más gondolkodók pedig úgy fogták meg a kérdést, hogy éppen a szükségességét próbálták bizonyítani, azaz azt, hogy elhagyása logikai ellentmondásokhoz vezet. Makacs feladatnak bizonyult. A 11. axióma „nem engedte", hogy kibillentsék az axiómák közül. Erre figyelt föl a mi Bolyaink. A görögök szellemi nagyságát dicséri, hogy a késői utókor egyik tábora sem érte el célját.

Közben azonban az történt, hogy a bizonyítási próbálkozások alatt ezt a nehézkes állítást nemcsak a 13. századi arab tudósok, hanem később mások is sokszor átfogalmazták és az azzal egyenértékű állítást vizsgálták az eredeti helyett. A több mint egy tucat átfogalmazásból példaként említjük meg a három legismertebb változatot:[7]

a) egy egyeneshez a rajta kívül fekvő ponton át (az egyenest és pontot tartalmazó síkban) csak egy párhuzamos húzható;
b) a háromszög szögeinek összege két derékszög
c) vannak hasonló háromszögek: ha egy háromszög minden oldalát azonos arányban változtatjuk, a háromszög szögei nem változnak.

Az első megfogalmazás lett a 11. axióma leginkább közkedvelt változata, ezért kaphatta a párhuzamossági axióma elnevezést. De még ilyen formájában sem látszott igazi axiómának, mert végül is nem ellenőrizhető a gyakorlatban. A 18. században a matematikusok újfent nekilendültek, és elkezdtek foglalkozni a párhuzamossági axióma kérdésével. Giovanni G. Saccheri (1667-1733) 1733-ban, Johann H. Lambert (1728-1777) 1766-ban, majd Adrien M. Legendre (1752-1833)

[6] Vö. Prékopa András: Bolyai János forradalma. Természet világa. 2003. I. Különszám. 3.
[7] Gábos Zoltán: Mit adott a fizikának Bolyai János? Bolyai emlékkönyv. Vincze Kiadó, 2004. 268. A három példát innen vettük át.

1800-ban készítettek értékes hozzájárulást ehhez a gondolathoz. Hozzájuk hasonló előfutárnak tekintendő Bolyai Farkas (1775-1856) is.[8] Ez a csoport inkább a 11. axiómának a többiből való levezethetőségével foglalkozott. A 19. századi tudósok már megsejtették, hogy az euklideszi geometria mellett van másfajta geometria is. Ferdinand K. Schweikart (1780-1859) 1818-ban és Franz A. Taurinus (1794-1874) 1826-ban jutottak erre a gondolatra.[9] Carl F. Gauss (1777-1855) is csak a sejtés szintjén vélekedett e dologban, de nem tekinthető a hiperbolikus geometria fölfedezőjének.[10] A felfedezés érdeme egyértelműen Bolyai Jánosé (1802-1860) és Nyikoláj Lobacsevszkijé (1792-1856), akik egymástól függetlenül jutottak ugyanarra a következtetésre. Bolyai hamarabb fölfedezte, Lobacsevszkij pedig hamarabb publikálta.

Szeretnénk végre tudni: mi ennek a fölfedezésnek a lényege? Mi itt főként Bolyai gondolkodását fogjuk követni. Előbb azonban ismerjük meg életét, sorsát.

Bolyai János életútja röviden

1802. december 15-én született Kolozsvárott kisnemesi székely családban. Édesanyja Árkosi Benkő Zsuzsanna, édesapja Bolyai Farkas volt, akit 1804-ben megválasztottak a Marosvásárhelyi Református Kollégium matematika-fizika-kémia professzorává. János fiuk zenei és matematikai tehetsége már korán megmutatkozott. A Marosvásárhelyi Református Kollégiumban gyorsan haladt a tanulmányaival, s 16 évesen beiratkozhatott a bécsi Császári és Királyi Hadmérnöki Akadémiára. 20 éves korában már elvégezte. Temesvárra osztották be egy hadi erődítményhez. Komoly szinten hegedült, és jól vívott. Már az akadémiai évei alatt is foglalkozott a 11. axióma kérdésével. A paralellák iránti érdeklődése édesapjától származik, bár ő óvta a fiát e témával való foglalkozástól. Már Temesváron szolgált mint katonatiszt, amikor megoldotta a párhuzamossági axióma kérdését, és 1823. november 3-án keltezett levelében ezt megírta édesapjának: „*a semmiből egy ujj más világot teremtettem*.” Ide kívánkozik, hogy széleskörű tájékozottsága révén ismerte a kereszténység egyik alapvető tanítását is, amelyet a *creatio ex nihilo*, tehát a *semmiből való teremtés* kifejezés foglal össze. Nyilvánvalóan ennek

---

[8] Bolyai Farkas a Tentamen című főművében beszámol azokról a kísérletekről, amelyeket az 5. posztulátum bizonyításáért tett és felsorolja az azt helyettesítő átfogalmazásokat.

[9] A történeti adatokat jobbára Gábos Zoltán összefoglalásából vettük. Vö. Gábos Zoltán: Mit adott a fizikának Bolyai János? In: Bolyai emlékkönyv. Vincze Kiadó, 2004. 268-269.

[10] Szénássy Barna megvizsgálta Gaussnak a nem-euklideszi geometriára vonatkozó „munkásságát”, de nem talált arra utaló jeleket, hogy ezen a téren ő valamit is tett volna. Vö. Szénássy Barna: Megjegyzések Gauss nemeuklideszi geometriai eredményeihez. In: Bolyai emlékkönyv. Vincze Kiadó, 2004. 111-120. Prékopa András is ebbe a csoportba sorolja Gausst. Vö. Prékopa András: Bolyai János felfedezésének előzményei és utóhatása. In: Bolyai emlékkönyv. Vincze Kiadó, 2004. 98.

mintájára fogalmazhatta meg az imént említett híres mondatát.[11] Mármost a fölfedezését ő le is írta latinul 1825-ben. Édesapja is írt egy kétkötetes matematikai művet Tentamen címmel, mely tankönyvül szolgált Marosvásárhelyen. Ennek első kötetéhez csatolva, Appendixként jelentették meg Bolyai János nemeuklideszi geometriájára vonatkozó művét 1832-ben. Előtte különlenyomatban is megjelent, és 1831-ben elküldték Gaussnak. Eredetileg ezt a címet viselte: *Scientia Spatii*. Azaz: *A tér tudománya*.[12]

Bolyai János élete tele volt zökkenőkkel. Egyébként csöndes, jámbor ember volt. Már 30 éves kora óta betegség gyötörte, s alig volt nyugalmas ideje az alkotásra. A magyarországi matematikusok között nem akadt méltó szellemi partnere, aki művének jelentőségét idejében felismerte volna. Amíg élt, Európában sem érett meg erre az idő. Csak jóval halála után kezdték gondolatainak értékét fölfedezni, amint ez Riemann esetében is így volt. Bolyai Jánosnak az Orbán Rozáliával kötött házasságából két gyermek született, Dénes és Amália. Egyenetlen házasságuk később fel is bomlott. 1860-ban halt meg elhagyatottságban, Marosvásárhelyen. Temetésén három ember vett részt és egy katonai díszkíséret. A református egyház halotti anyakönyvébe a lelkész ezt a bejegyzést tette: „*Híres nagyelméjű mathematicus volt, az elsők között is első. Kár, hogy talentuma használatlanul ásatott el*."[13] Ennél a két mondatnál ma sem tudnánk jobban összefoglalni életének tanulságait és magyar nemzetünknek szóló üzenetét!

A modellváltás lényege

A 11. axióma lényegében azt állítja, hogy egy egyenesen kívül fekvő ponton keresztül, az általuk meghatározott síkban egy párhuzamos egyenes húzható. Bolyai

---

[11] A „*semmiből egy ujj más világot teremtettem*" megállapítás, melyet Bolyainak az édesapjához írt levelében olvashatunk, csupán egyfajta hangsúlyozása lehet a felfedezése horderejének. A kifejezést ő nem vehette máshonnan, mint a *creatio ex nihilo* keresztyén tanítás köréből. Tudományos értelemben azonban így nem állja meg a helyét, mert a Bolyai-féle felfedezésnek éppen az a lényege, hogy nem a „semmiből" hozott elő újat, hanem a már meglévő euklideszi axiómarendszerből. Amikor ugyanis a hiperbolikus geometriában a párhuzamossági szög eléri a derékszöget, az egész rendszer átmegy az euklideszi geometriába. Annak speciális esetévé válik.

[12] Az Appendix fedelén már a hosszabb cím jelent meg latinul: *Appendix, Scientiam Spatii absolute veram exhibens; a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica*. Magyarul: *Appendix, a tér abszolút igaz tudománya; a XI. Euklidész-féle axióma (a priori soha el nem dönthető) helyes, vagy téves voltától független tárgyalásban; annak téves volta esetére a kör geometriai négyszögesítésével*. Vö. Prékopa András: Bolyai János forradalma. Természet világa. 2003. I. Különszám. 13.

[13] Puskás Ferenc: Előhang a Bolyai-emlékkönyvhöz. In: Bolyai emlékkönyv. Erdélyi Magyar Műszaki Tudományos Társaság, Kolozsvár, 2003. 11-12.

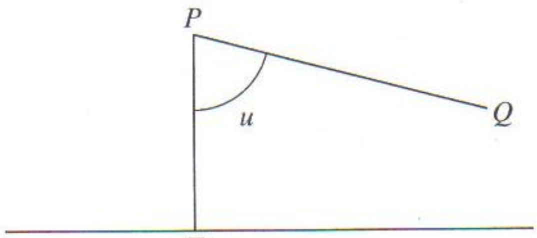
János meglátott egy sarkalatos tényt: ez az axióma olyan szerepet játszik az euklideszi geometriában, hogy nem enged belőle kilépni. Itt Gábos Zoltán nagyon lényeges megállapítást tesz: „*Az axiómának sajátos, elkülönített szerepe van az euklideszi keretben, mivel a benne foglalt állítás hangsúlyozza, rögzíti az euklideszi jelleget. Egyben egy olyan merevítőelemet képviselt, amelyik akadályozza az euklideszi rendszerből való kilépést. Az akadály eltávolítása nyitott utat egy új, logikailag lehetséges geometria és egyben egy új térmodell felé.*”[14] Ez az axióma szinte bezárja, lezárja azt a rendszert. Úgy is fogalmazhatnánk, hogy *nem lehet bebizonyítani, hogy a 11. axióma az előző tíz axiómának következménye*. Ha pedig ez így van, akkor bátran el lehet hagyni és egy másik állítással helyettesíteni. Ezt meg is tette, és az új axióma révén Bolyai nem kevesebbet állított, minthogy az egyenesen kívül lévő ponton keresztül a síkjukban végtelen sok párhuzamos húzható. Ez éppen annyira elképesztő állítás, mint amikor Einstein a fénysebességet mindenre tekintet nélkül állandónak mondta ki. Bolyai János megdöbbentő állítása azt eredményezte, hogy végre kiléphetett az euklideszi rendszerből, s ez egy olyan folyamatot indított el a matematika fejlődésében, amely lényegében mindmáig tart. Felnyitotta a zárt világot!

Itt nem foglalkozhatunk a dolog konkrét matematikai részleteivel, csupán azt említjük meg, hogy végül is az új geometriában szerepel egy hiperbolikus algebrai kifejezés, ezért kapta a hiperbolikus geometria nevet.[15] Határesetben ez a geometria átmegy az euklideszi geometriába.

[14] Vö. Gábos Zoltán: Mit adott a fizikának Bolyai János? In: Bolyai emlékkönyv. Vince Kiadó, Budapest, 2002. 269.

[15] A hiperbolikus geometria matematikai szempontú leírását Kiss Elemér: Matematikai kincsek Bolyai János kéziratos hagyatékából, Typotex, Budapest, 2005. 21. alapján foglaljuk össze. Az Appendix 29. paragrafusára hivatkozva Kiss Elemér ezt az ábrát, illetve magyarázatot közli:

$$\operatorname{ctg}\frac{u}{2} = e^{\frac{x}{k}}$$



A Bolyai-geometria jövőbe mutató jelentősége

Jelentőségét tekintve, a Bolyai és Lobacsevszkij által létrehozott új geometriai szemlélet, illetve tudományos bátorság további eredményekhez vezetett. Az út kétfelé ágazott.

— Az egyik nagy jelentőségű mozgás a matematika több területén fölvetette az axiomatizálás bevezetését. Ebben éppen az az érdekes, hogy a Bolyai-féle gondolkodás alapjában véve megszüntette a *more geometrico* mindenre kiterjedő, örök érvényét, de egyúttal fölhívta a figyelmet az axiomatizálás helyes használatára is. Tovább nem kellett tartani attól a következménytől, hogy az axiómák csupán egy merev keretet biztosítanak a tudományos gondolkodás számára, hanem inkább olyan szerepet töltenek be, amely által rendet teremtenek az egyes területeken. Ha pedig egy axiomatikusan rendezett területről tovább szeretnénk lépni, mert a rendszerünk zártnak mutatkozik, akkor meg kell találni azt a „merevítő" elemet, amely nem enged kilépni a rendszerből, és azt oly módon kell helyettesíteni egy másikkal, hogy a korábbi igazságok ne sérüljenek, ugyanakkor tovább lehessen lépni egy nyitottabb világba. Ez történt a matematika jó néhány területén, mint például az algebrában és a számelméletben, de további lépéseket tettek a geometria terén is.[16] Ezt David Hilbert (1862-1943) oldotta meg 1899-ben.

– Az elindított folyamat másik nagy ága megmaradt a geometria berkeiben és Riemann nevéhez kötődik. Bernhard Riemann (1826-1866) még megérte azt, hogy Gauss halála előtt két évvel benyújtotta a habilitációs téziseit, amelyek közül kettőt már kidolgozott, de Gauss éppen a harmadikra mutatott rá, amellyel még nem volt készen.[17] Ezt is kidolgozta és ezáltal egy olyan nagy hatású művel aján-

Ahol PT=*x*, *m*(TPQ szög)=*u* az *x* távolsághoz tartozó párhuzamossági szög, *e* az Euler-féle szám (*e*=2,718…), *k* pedig egy, a teret jellemző pozitív valós szám. Részletesebb magyarázat végett lásd Kiss Elemér könyvét.

[16] Vö. Prékopa András: Bolyai János felfedezésének előzményei és utóhatása. In: Bolyai emlékkönyv. Vincze Kiadó, 2004. 106.

[17] Ez is egy rendkívül érdekes történet. Riemann levelet írt egyik testvérének és leírta, hogy sorrend szerint a habilitációs előadásra javasolt első két tételét már kidolgozta, mert általában mindig az első tételt szokták kérni a vizsgán. Most Gauss éppen arra a harmadikra mutatott rá, amelyet Riemann még nem dolgozott ki, csak megsejtett benne valami jelentős eredményt. Riemann azt írta a testvérének, hogy „most vagyok aztán bajban, mert még ezt nem dolgoztam ki", de az idő sürget. Összeszedte minden szellemi erejét, kidolgozta a harmadik javasolt előadását, s lám, kiderült, hogy az nem volt más, mint egy újabb geometriai terület megalapozása, amely nélkül Einstein a *relatívitáselméletét* nem tudta volna kidolgozni.

dékozta meg a matematikát, amely később az Einstein-féle relativitáselmélet alapjául szolgált. A mű a geometria alapjaival foglalkozott.[18] 1854-ben Riemann a vizsgáját sikerrel letette, Gauss pedig a következő évben meghalt. Valószínűleg ennek a műnek a jelentőségét sem igen fogta föl a tudományos világ, mert csak Riemann 1866-ban bekövetkezett korai halála után két évvel adták ki.[19] Riemann igazából Gaussnak a felületekkel foglalkozó geometriai elképzelését általánosította. Még ő maga sem igen ismerte a Bolyai és Lobacsevszkij által már kidolgozott hiperbolikus geometriát, de még ekkor a tudományos közvélemény előtt sem volt eléggé ismert, illetve elismert. A dolog lényege az, hogy Riemann a pozitív görbületű felületekkel foglalkozott, a hiperbolikus geometria pedig egy negatív görbületű felületnek felel meg. Számunkra úgy tűnik, hogy Gauss mindkét esetben politikus módjára járt el, nem állt ki határozottan sem a Bolyai-Lobacsevszkij-geometria, sem pedig a Riemann-geometria mellett. Eltűnődhetünk azon, hogy vajon ő mennyire látta ezek jövőt formáló, hatalmas lehetőségét.

Összegzés

Összegzésképpen valamilyen megnyugtató dolgot szeretnénk mondani. Láttuk, hogy milyen forradalmi jellegű volt a Bolyai-Lobacsevszkij- geometria,[20] s ezen a forradalmi úton haladva jelent meg Riemann még általánosabb szemléletű geometriája. Egyiknek sem volt döntő sikere, mert még nem ismerték föl a jelentőségüket. Akkor még senki nem gondolta, „*hogy a geometria és a valóság lehet különböző, hogy a geometria felfogható az absztrakt elméletek egy osztályának, nem mondva le az alkalmazás igényéről, mert önkényesen is értelmezhető struktúrái ugyanolyan módon vizsgálhatók, mint pl. a függvények, vagy más matematikai objektumok*” — állapítja meg Prékopa András matematikus.[21] A mindennapi szemlélet ugyanis azt sugallja, hogy a körülöttünk lévő világ euklideszi, azaz pontok, egyenesek és síkok segítségével leírható. Kant is ezt tanította, s tekintélyével

[18] Vö. Szente János: A hiperbolikus geometria és a Riemann-geometria kapcsolata. In: Bolyai emlékkönyv. Vincze Kiadó, 2004. 308-309. Riemann habilitációs művének címe: *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen.*

[19] Vö. Szente János: A hiperbolikus geometria és a Riemann-geometria kapcsolata. In: Bolyai emlékkönyv. Vincze Kiadó, 2004. 308.

[20] Párizsban, 1894-ben a matematikai tudományok nemzetközi bibliográfiai kongresszusa az új geometriát, amelyet mi is gyakran hiperbolikus geometriának hívtunk, *Bolyai-Lobacsevszkij-geometriának* nevezte el. Korábban még Gauss neve is szerepelt a hiperbolikus geometria felfedezői között, de ettől kezdve az ő nevét kiiktatták. Helyesen tették! Vö. Kálmán Attila: Bevezető Bolyai János új, más világába. In: Természet világa. Bolyai emlékszám. 2003. I. Különszám. 43.

[21] Prékopa András: Bolyai János forradalma. Természet világa. 2003. I. Különszám. 12-13.

erre terelte még a tudósok figyelmét is.[22] Bolyai viszont élesen bírálta Kantnak a térrel kapcsolatos gondolatait: „*A különben sok érdemű, és szépelméjű Kant alaptalan, s helytelenül el-ficamodva az értelmetlen tant tanálta is állítani: hogy az űr … nem önálló-mi, hanem csak nézlet vagy látványaink idomja!*”[23] Nem sokkal ezután jött egy újabb korszakos lépés a fizikában, amikor is Maxwell megmagyarázta az elektromágneses erőtér létezését, sőt ennek a törvényét is felírta a híres parciális differenciálegyenletek segítségével. Einstein ezt úgy jellemezte, hogy az elektromágneses erőtér bevezetésével, magyarázatával Maxwell egy új valóságot tárt föl. Ekkor kezdődött a gravitáció erőtérként való felfogása is, ugyanis előtte csak annyit tudtak, hogy „*távolbahatásról*” van szó. Még Newton is csak annyit gondolt a gravitációról, hogy az nem más, mint *action at a distance*.

Ma már valóban másként látjuk a tér valóságát, hiszen az általános relativitáselmélet kapcsán állíthatjuk, hogy éppen a tér az a valóság, amely ilyen vagy olyan tulajdonságokat mutat. Tehát nem csupán a képzeletünkben van meg, miként Immanuel Kant esetében, hanem valóságos természetelemként mutatkozik. Bolyai valójában a maga bátor lépésével arra mutatott rá, hogy logikailag lehetséges *nem-euklideszi* geometria is, méghozzá többfajta, és ezek bármennyire is absztrakt geometriák, mégis kapcsolatba hozhatók a valóságos fizikai világgal. Ezért helyénvaló a Bolyai-Lobacsevszkij szemléletet a geometria kopernikuszi fordulatának nevezni, ugyanis magában hordozza azt a lehetőséget, miszerint mögötte egy addig nem ismert, új valóság létezik. Amikor 1891-ben George Bruce Halsted professzor Bolyai új térelméletét angolra fordította, az előszóban ezt írta: „*Ez a huszonnégy oldal a legrendkivülibb két tucat oldal a gondolkodás történetében.*”[24]

Záró gondolatok

Azzal, hogy Bolyai János és Nyikolaj Lobacsevszkij fölnyitották Euklidész zárt világát, az egzakt tudományok körében egy olyan folyamatot indítottak el, amely programot adott a 20. századnak. E program megvalósítása kapcsán mondta Einstein: „*Fizikai okokból bizonyosnak tűnt, hogy a metrikus tér egyúttal a gravitációs tér is. Minthogy a gravitációs teret a tömegek konfigurációja határozza meg, ezért a tér geometriai szerkezete fizikai tényezőktől függ. A tér tehát ezen elmélet szerint … nem abszolút többé, hanem szerkezete fizikai hatásoktól függ.*”[25] Ez olyan üzenet, amelynek Bolyai nagyon örült volna, de voltaképpen ő indította el útjára ezt a folyamatot a zárt axiomatikus világ felnyitásával. Ő volt az első a tudománytörténet során, aki egy olyan állítást fogalmazott meg, amely teljesen ellentétes volt

[22] Többen megjegyzik, hogy valószínűleg Gauss sem akart a kantiánus világ ellen állást foglalni.

[23] Idézi Gábos Zoltán: Mit adott a fizikának Bolyai János?, i.m. 274.

[24] Prékopa András: Bolyai János forradalma. Természet világa. 2003. I. Különszám. 13.

[25] Albert Einstein: Válogatott tanulmányok. Gondolat, Budapest, 1971. 257.

a rációval, azaz, hogy az egyenesen kívül lévő ponton keresztül nemcsak egy párhuzamos egyenes húzható. Ezt a képtelenséget követte később Einstein bátorsága is a fény állandó sebességének feltételezésével, s mindkettőből hatalmas eredmény származott az utókorra. Ilyen értelemben a kálvinista székely Bolyainak tényleg igaza volt, amikor azt írta édesapjának: „*a semmiből egy új, más világot teremtettem*”!