Az egyértelmű cáfolata magasabb dimenzióban

Molnár Gábor Marcell
matematikus, PhD hallgató, Debreceni Egyetem

Sokszor még a legegyértelműbbnek tűnő dolgok sem bizonyulnak igaznak. Minden tudományterületről érkező tudós jól tudja, hogy a legmegalapozottabbnak tűnő tényekből is veszélyes játék messzemenő következtetéseket levonni gyakorlati tapasztalatok, kísérletek hiányában. Hasonló a helyzet a matematika világában is, leszámítva, hogy a kísérletek szerepét a matematikai bizonyítások veszik át. A megalapozottnak tűnő tények pedig az intuícióink.

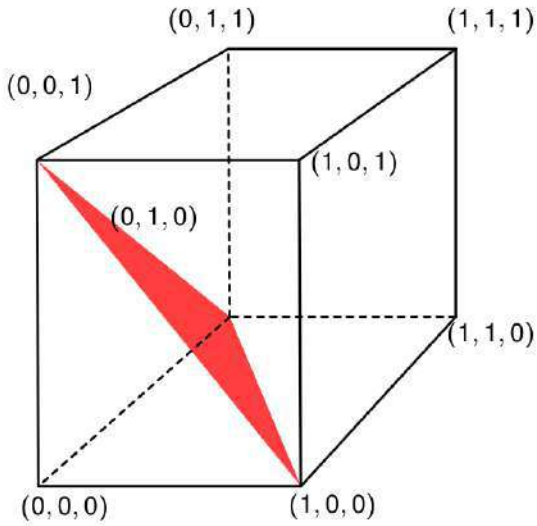
A fentieket tökéletesen illusztráló példa az 1992-ben megtörtént eset. A szóban forgó általánosítást (sejtést) Karl Borsuk fogalmazta meg 1933-ban miután igazolta, hogy bármilyen síkbeli alakzat, amelynek átmérője (az alakzat két legtávolabbi pontjának távolsága) 1, feldarabolható három olyan alakzatra, amelyek átmérője egyenként kisebb, mint 1. Ugyanez az eljárás alkalmazható eggyel kevesebb dimenzióban is: az egység hosszúságú (átmérőjű) szakasz felosztható két szakaszra, amelyek mindegyikének átmérője kisebb, mint 1. Természetesen adódott tehát a kérdés: *igaz-e, hogy bármely 1 átmérőjű n-dimenziós alakzat felbontható n+1 darab egyenként 1-nél kisebb átmérőjű darabra?* Ez a jól ismert Borsuk-sejtés, amelynek megoldására 60 évet kellett várni.

Felmerülhet az olvasóban a kérdés, hogy nem lehet-e esetleg még kevesebb részre felbontani az alakzatokat. Például az egység átmérőjű négyzetet, ami egy 2-dimenziós síkidom, egyszerűen két oldalával párhuzamosan elvágva két téglalapot kapunk, amelyek átmérője 1-nél kisebb. Tehát ebben az esetben a dimenziószámmal megegyező részre elegendő osztani az alakzatot. Ugyanakkor tekintsük az egység oldalhosszúságú szabályos háromszöget. Mivel a csúcsok páronként 1 távolságra találhatók, ezért csak úgy lehet felosztani a szóban forgó háromszöget, hogy minden csúcs külön részbe kerüljön. Ugyanez igaz a háromdimenziós testvérére a tetraéderre is. Jól látható tehát az n+1 darab részre bontás szükségessége.

A Borsuk-sejtést illetően 1946-ban a svájci matematikus Hugo Hadwiger mutatta meg, hogy bármely n-dimenziós geometriai alakzat felbontható n+1 kisebb átmérőjű részre, ha a határa sima. Az eredeti Borsuk-sejtést 1947-ben a lengyel matematikus Julian Perkal, majd tőle függetlenül 1955-ben az angol H. G. Eggleston is bizonyította a háromdimenziós térben. A dolgok tehát jól alakultak a sejtés számára.

Végül azonban 1992-ben Jeff Kahn (Rutgers University, New Jersey, USA) és Gil Kalai (Hebrew University, Jerusalem, Israel) ellenpéldát adtak, cáfolva ezzel a Borsuk-sejtést. A kulcs a geometriai probléma átfogalmazása volt egy kombinatorikai problémává David Larmannak (University of London, London, UK) köszönhetően.

Ha a Borsuk-sejtés igaz, akkor bármilyen geometriai alakzatra is igaznak kell lennie. Speciálisan arra az alakzatra is, amelyet egy n+1 dimenziós kocka elvágásával kapunk úgy, hogy a vágás éppen n+1 darab csúcsát tartalmazza (egy további feltétel a koordináták között szereplő 1-esek számának megválasztása). Az így kapott alakzat már n-dimenziós és a szereplő csúcsokat azonosíthatjuk az $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$ halmaz részhalmazaival: ahányadik helyen 1-es van, az a sorszám bekerül a halmazba. Például az ötdimenziós kocka egy csúcsa esetében $(1,1,1,0,1) \rightarrow \{1,2,3,5\}$.



1. ábra A csúcsokon keresztül fektetett sík és a kocka metszete egy háromszög

Két csúcs távolságát jellemezhetjük a hozzájuk tartozó részhalmazok metszetével. Annál nagyobb két csúcs közötti távolság, minél kisebb a két csúcshoz rendelt halmazok metszetének elemszáma. Tekintsük a 1. ábrán szereplő kockát: $A = (0,1,0) \rightarrow \{2\}, B = (1,0,0) \rightarrow \{1\}, C = (1,1,0) \rightarrow \{1,2\}, D = (0,0,1) \rightarrow \{3\}$

Az A és B csúcsok egyenlő távolságra vannak a C csúcstól, hiszen a nekik megfelelő részhalmazoknak 1-1 közös elemük van, viszont a D csúcs távolabb van a C csúcstól, mint az A és a B csúcsok, mert a D, illetve a C csúcsokhoz rendelt halmazoknak nincs közös eleme.

Ebben a kontextusban David Larman a következőképpen fogalmazta meg a Borsuk-sejtést: ha S az $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$ halmaz részhalmazainak egy olyan családja (halmaza), hogy minden S-ben szereplő részhalmaz elemszáma megegyezik, és bármely kettőnek van legalább d darab közös eleme, akkor S felbontható $n+1$ darab részre úgy, hogy az egyes részekben (külön-külön) bármely két részhalmaznak van legalább $d+1$ darab közös eleme. Kahn és Kalai ezt az állítást cáfolta a Frankl-Wilson tétel (Frankl Péter magyar matematikus) segítségével: legyen k egy prímhatvány és $n = 4k$, továbbá S az $\{1, 2, \dots, 4k\}$ halmaz részhalmazainak egy családja úgy, hogy bármely részhalmaz elemszáma $2k$ és semelyik két részhalmaznak sincs k darab közös eleme. Ekkor

$$|S| \leq 2\binom{4k-1}{k-1}.$$

Kahn és Kalai ellenpéldájában $n = 2016$. Jelenleg $n = 64$ a legkisebb olyan érték, amire már nem teljesül a Borsuk-sejtés.

Irodalomjegyzék

[1] Cipra, B. *What's Happening in the Mathematical Sciences*, Vol. 1. Providence, RI: Amer. Math. Soc. pp. 21-25, 1993.

[2] J. Kahn and G. Kalai, "*A counterexample to Borsuk's conjecture*," Bull. Am. Math. Soc. (New Ser.), 29, No. 1, 60–62 (1993).

[3] T. Jenrich, *A 64-dimensional two-distance counterexample to Borsuk's conjecture*, arXiv:1308.0206v6