International Journal of Engineering and Management Sciences (IJEMS) Vol. 5. (2020). No. 2
DOI: 10.21791/IJEMS.2020.2.36.

Geometriai transzformációk szerepe a függvényfogalom alakításának folyamatában
The Role of the Geometric Transformations in ihe Formation Process of the Function Concept

GY. SZANYI[1], A. VÁMOSINÉ VARGA[2]

[1]Debreceni Egyetem, Műszaki Kar, Műszaki Alaptárgyi Tanszék, szanyi.gyongyi@eng.unideb.hu
[2]Debreceni Egyetem, Műszaki Kar, Műszaki Alaptárgyi Tanszék, vargaa@eng.unideb.hu

Absztrakt. A függvénytani ismeretek és a különböző geometriai transzformációk fontos szerepet töltenek be a műszaki tudományok területén. Minthogy a geometriai transzformációk is függvények, ún. geometriai függvények, ezért jelen tanulmányban egy lehetséges módját mutatjuk be annak, hogy a GeoGebra matematikai szoftverrel elkészített animációi a különböző geometriai transzformációknak hogyan alkalmazhatók a függvényfogalom alakítási folyamatában az általános, illetve középiskolás korosztályokban egyaránt.

Abstract. The concept of the function and the different geometrical transformations play important role in the technical sciences. Since geometric transformations are functions, so-called geometric functions, therefore, in this study, we present a possible way of that, how can we apply the animations of the geometrical transformations which are made with GeoGebra in the formation process of the function concept in the primary and secondary school level.

Bevezetés

Az EFOP-3.6.1-16-2016-00022 00022 „Debrecen Venture Catapult Program” projekt keretében olyan foglalkozások kidolgozására és megtartására kerül sor általános és középiskolás korosztályokban, melyeknek célja egyrészt a tanulók érdeklődésének felkeltése a műszaki pálya iránt, másrészt az, hogy és tudatosítsa a természettudományos ismeretek fontosságát e területen.

A függvényfogalom ismerete, megértése és alkalmazása nem csak a matematika, hanem számos más tudományterület, így a műszaki tudományok művelése szempontjából nagy fontossággal bír. Emiatt is lényeges, hogy a tanulóknál az iskolai matematika tanulás során olyan fogalomképzet alakuljon ki a függvényről, melyre a későbbiekben építhető a felsőfokú képzés tananyaga.

Kutatások támasztják alá, hogy az általános vagy a középiskola befejezése előtt álló, sőt, egyetemet kezdett tanulók függvényről kialakult képzete nincs kölcsönös kapcsolatban annak definíciójával (Vinner, 1983, Szanyi, 2015, 2017b). A tanulók úgy gondolnak a függvényre, mely mindenképpen leírható képlettel (algebrai formulával) vagy reprezentálható grafikonnal (Sierpinska, 1992, Clement, 2001), valamint a „függvény” szóhoz a különböző specifikus függvényeket kapcsolják (lineáris,

DOI: 10.21791/IJEMS.2020.2.36.

másodfokú függvény stb.). Viszont ez azt vonhatja maga után, hogy a fogalmat definiáló tulajdonságok „háttérbe" szorulnak, és a tanulók más típusú relációkat (például a geometriai transzformációkat) nem hozzák kapcsolatba a függvény fogalmával.

Jelen tanulmány azt mutatja be, hogy miért és hogyan célszerű a NAT által az egyes korosztályokban kitűzött geometriai transzformációkat beépíteni a függvényfogalom alakítási folyamatába. A geometriai transzformációk és a függvényfogalom kapcsolatának iskolai környezetben való bemutatása azért is fontos, mert *„ha elegendően gazdag tapasztalati anyagot nyújtunk a gyerekeknek, akkor a függvény fogalmát éppoly hatásosan el tudják sajátítani, mint a változó vagy a szám fogalmát."* (Dienes, 2015, 157. old.).

1. Didaktikai megfontolások a függvényfogalom alakítására

A függvény fogalmára többféle definíció létezik és reprezentációinak száma is jelentős. Megértése emiatt is jelenthet nehézséget a tanulóknak.

Skemp (2005) szerint a tanulók életkori sajátosságának megfelelően tisztázni kell a definícióban (így a függvény definíciójában is) szereplő elemek jelentését és jelentőségét, valamint tudatosítani kell a szavak köznapi jelentésével való kapcsolatot. Mindez elérhetővé tehető olyan változatos, mindennapi életben is megjelenő példák bemutatásával, melyek rendelkeznek a fogalmat alkotó közös tulajdonságokkal. Ezek a példák jelennek meg az absztrahálási folyamatban is. Varga Tamás szerint „absztrahálni csak konkrétumokból lehet és ahhoz, hogy valaki jól tudjon absztrahálni, sokféle konkrétummal kell megismerkednie…" (Varga, 1966, 86-87. old.).

A fogalom tanítási folyamatába tehát célszerű olyan - az adott korosztályban megfelelő - konkrétumot bemutatni a tanulóknak, melyben felfedeztethető a függvényfogalom "legbelső" rétege (Tall & DeMarios, 1996), a *procept*, mely három komponensből áll: egy *folyamat*ból (*process*) ("input – transzformáció-output"), annak eredményeként létrejövő matematikai *objektum*ból (*concept=fogalom*) és akár a folyamatot, akár az objektumot reprezentáló *szimbólum*ból (például a függvény képlet reprezentációja) (Gray & Tall, 1994).

Ha a tanuló a fogalom megértésének szakaszain (előfüggvény, cselekvés, folyamat, objektum) (Dubinsky és Harel, 1992, 85. old.) haladva eljut a két utolsó, szorosan egymásba fonódó szakaszhoz, akkor a fogalmat alkotó elemek – változók, kapcsolatok, szabályok – megismerése is megtörténik. Ezen elemeknek az alapos ismerete és megértése elengedhetetlen a műszaki életben is gyakorta megjelenő vektorértékű ($\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ típusú) függvényekkel leírható kapcsolatok (például az eldobott test helyvektor-idő függvénye) felismeréséhez és megértéséhez is.

A „folyamat" és „objektum" szakaszokban a függvényfogalom egymással kapcsolatban lévő aspektusaival, továbbá annak különböző reprezentációival is megismerkedik a tanuló, melyeket Doorman (2012) a következőképpen ír le:

- *a függvény mint egy „input-output" hozzárendelés:* a függvény egy bemenő-kimenő hozzárendelés, mely segít megszervezni és végrehajtani a számítási folyamatokat.

- a *függvény mint az együttváltozók dinamikus folyamata:* a fogalom ezen aspektusa arra vonatkozik, hogy míg a független változó „végigfut” az alaphalmazon, addig a függő változó is végigfut a képhalmazon. A függő változó együtt változik a függetlennel. Majd felmerül a kérdés, hogy ez az együttes dinamikai folyamat hogyan és miért megy végbe.
- a *függvény mint matematikai objektum:* a függvény mint matematikai objektum reprezentálható nyíldiagrammal, táblázattal, grafikonnal, képlettel és verbálisan.

A fogalom megértéséhez elengedhetetlen az, hogy a tanuló képes legyen alkalmazni annak többféle reprezentációját és át tudjon térni egyik reprezentációs módból egy lehetséges másikba (Lin & Cooney, 2001, idézi Areti et al, 2015, 440. old.), mivel ez növeli a problémamegoldás hatékonyságát is (Ambrus, 2004; Duval, 2002). Az is nagyon fontos, hogy a tanulók meglássák a különböző reprezentációk lévő kapcsolatot, és azok ne egymástól izoláltan épüljenek be ismereteikbe (Thompson, 1994).

A fogalom alkotóelemeinek és fentebb tárgyalt aspektusainak megismeréséhez Scott Steketee (2012) az ún. *geometriai függvények* (geometriai transzformációi a pontoknak a síkban – ponthoz pontot rendelő függvények) fogalomalakítási folyamatba történő beépítését javasolja a *numerikus függvények* mellett (számhoz számot rendelő függvény). Véleménye szerint a fogalomnak geometriai függvényekkel való alakítása segítheti a független és függő változók, értelmezési tartomány és értékkészlet, magának a függvény fogalmának, az összetett függvény és inverz függvény fogalmának megértését.

Véleménye szerint a függvényfogalom geometriai úton való alakításában a dinamikus matematikai szoftver azért játszik fontos szerepet, mert abban a fogalom „konkrétabban” megjelenik, mint a numerikus függvények esetében: egy független (pont) változó létrehozása után egy egyszerű mechanizmussal (tükrözés, nyújtás, eltolás, forgatás stb) a független változó „megváltozik”, és a változás eredményeként előáll a függő változó (egy másik pont). Tehát a függvényfogalom fentebb tárgyalt aspketusai megismerésre kerülnek, amelyek láthatók (vizuálisak) és mozgathatók. A független változó mozgatásával a tanuló megfigyelheti a folytonos mozgását a változóknak, össze tudja hasonlítani a függő változó mozgását a függetlenével, nyomon tudja követni a „függvény viselkedését” (például l=2 arányú hasonlóság).

A geometriai függvények azért is fontosak a függvényfogalom alakításában, mert számos, a műszaki életben is alkalmazott kapcsolatok nem csupán $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ típusú függvényekkel írhatók le. Viszont a függvényfogalom geometriai függvényekkel való alakítása gazdagíthatja a tanulóknak a fogalomhoz kapcsolódó tapasztalatait, továbbá kapcsolatot teremt a geometria és az algebra között: gyakorta előfordul, hogy a geometriai transzformációk a függvény fogalmától elkülönülve jelennek meg az iskolai oktatásban. Ez viszont befolyásolja az „ideális” fogalomképzet kialakulását, és a tanulók képzetében egy „szűk” függvényfogalom alakulhat ki, azaz a függvény fogalmát csak a számhoz számot rendelő hozzárendelésekre korlátozzák.

A geometriai függvények dinamikus matematika szoftverrel történő bemutatása olyan konkrétumokat tud produkálni a fogalom alakítási folyamatában, melyek hatékony módjai lehetnek annak, hogy egyrészt felkeltse a tanulók érdeklődését, motiválttá tegye őket a függvényfogalom tanulására

DOI: 10.21791/IJEMS.2020.2.36.

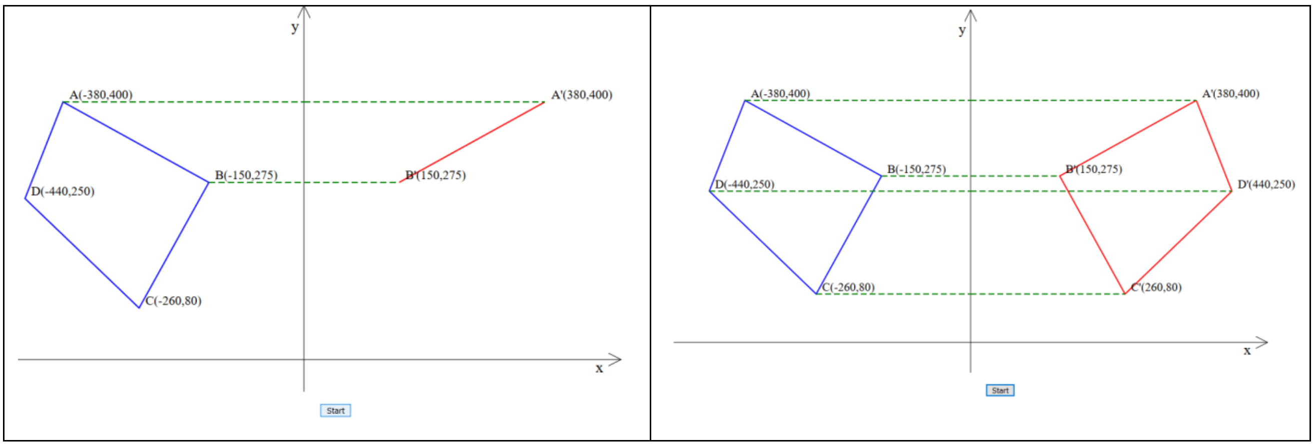
(Akçakın, 2017), másrészt, hogy a megtapasztalják nemcsak a geometriai transzformációkat, de a függvényfogalom alapjaival (a *procept* elemeivel) is megismerkedjenek.

2. Geometriai transzformációk és a függvényfogalom kapcsolata a különböző korosztályokban

A következőkben a különböző korosztályok Matematika kerettanterveiben megjelenő geometriai transzformációkra mutatunk példákat abból a célból, hogy azok hogyan nyújthanak segítséget a függvényfogalom bevezetésének előkészítő szakaszában (pl. 5-6. osztályban) a szabályfelismerő képesség fejlesztésében, illetve a fogalom alkotórészeinek megismerésében, majd alakíthatják a (kerettanterv alapján) 7. osztályban bevezetendő függvényfogalmat a további korosztályokban. A transzformációkatat a GeoGebra szoftver segítségével készítettük el.

Az általános iskola ***5-6. osztályai*** a függvényfogalom előkészítési szakasza. Nachlieli és Tabach (2012) szerint a függvény bevezetését alapos munka kell hogy megelőzze szimbolikus kifejezések, grafikonok és táblázatok tárgyalásának bevonásával. A kerettanterv ebben a korosztályban előírja a *tengelyes tükrözés* tanítási folyamatba való beépítését. Az alábbi animáció jól szolgálja nemcsak a tengelyes tükrözés fogalmának elsajátítását, de a függvényfogalom fentebb tárgyalt aspektusainak a megismerését is segítheti (1. ábra).

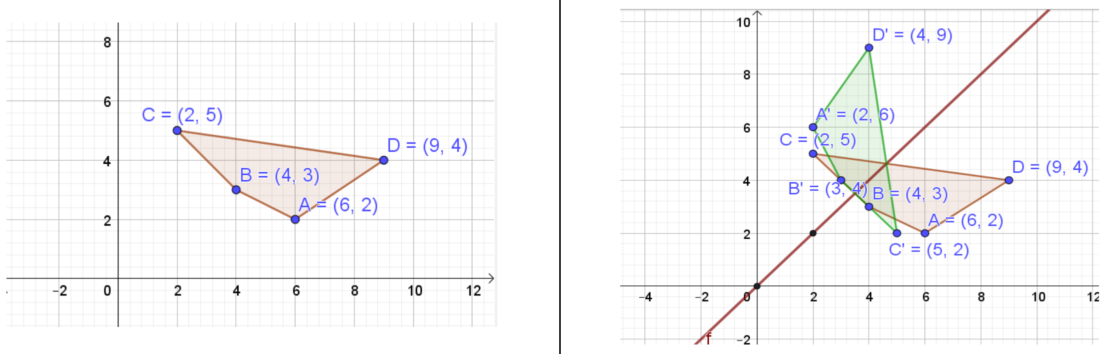
Célszerű az 1. és 2. ábrákon látható transzformációkat a Bruner-féle reprezentációs szinteknek (Ambrus, 2004) megfelelően először manuálisan elvégezni (tárgyi eszközökkel). Ezt követően az ikonikus (képi) síkon, a GeoGebra szoftverrel szemléltethetjük a transzformációt, mellyel a pontok dinamikus mozgása (és így a hozzárendelés iránya) láthatóvá válik: a négyszög egyes csúcspontjaihoz milyen pontokat rendeltünk. A csúcspontok közötti kapcsolatot táblázattal reprezentálva a szimbolikus síkra való áttérést segítheti, azaz a táblázatban közölt csúcspontú négyszögek pontjai közötti kapcsolat szimbólumokkal történő leírását. Ehhez célszerű a kezdeti pontok koordinátáit például x, illetve y betűkkel jelölni, a tükörképek koordinátáit pedig x' és y' betűkkel. Majd kiemelve egy pontpárt (pl. A és A') megvizsgálni, hogy a tükörkép x' és y' milyen kapcsolatban vannak az eredeti pont koordinátáival.



1. ábra[1] (Az animáció HTML alapú SVG programozással készült)

DOI: 10.21791/IJEMS.2020.2.36.

Ugyancsak megmutatható olyan tengelyes tükrözés is, amikor a tükrözés tengelye nem valamelyik koordináta-tengely (2. ábra)



(x, y)	A=(6,2)	B=(4,3)	C=(2,5)	D=(9,4)
(x', y')	A'=(2,6)	B'=(3,4)	C'=(5,2)	D'=(4,9)

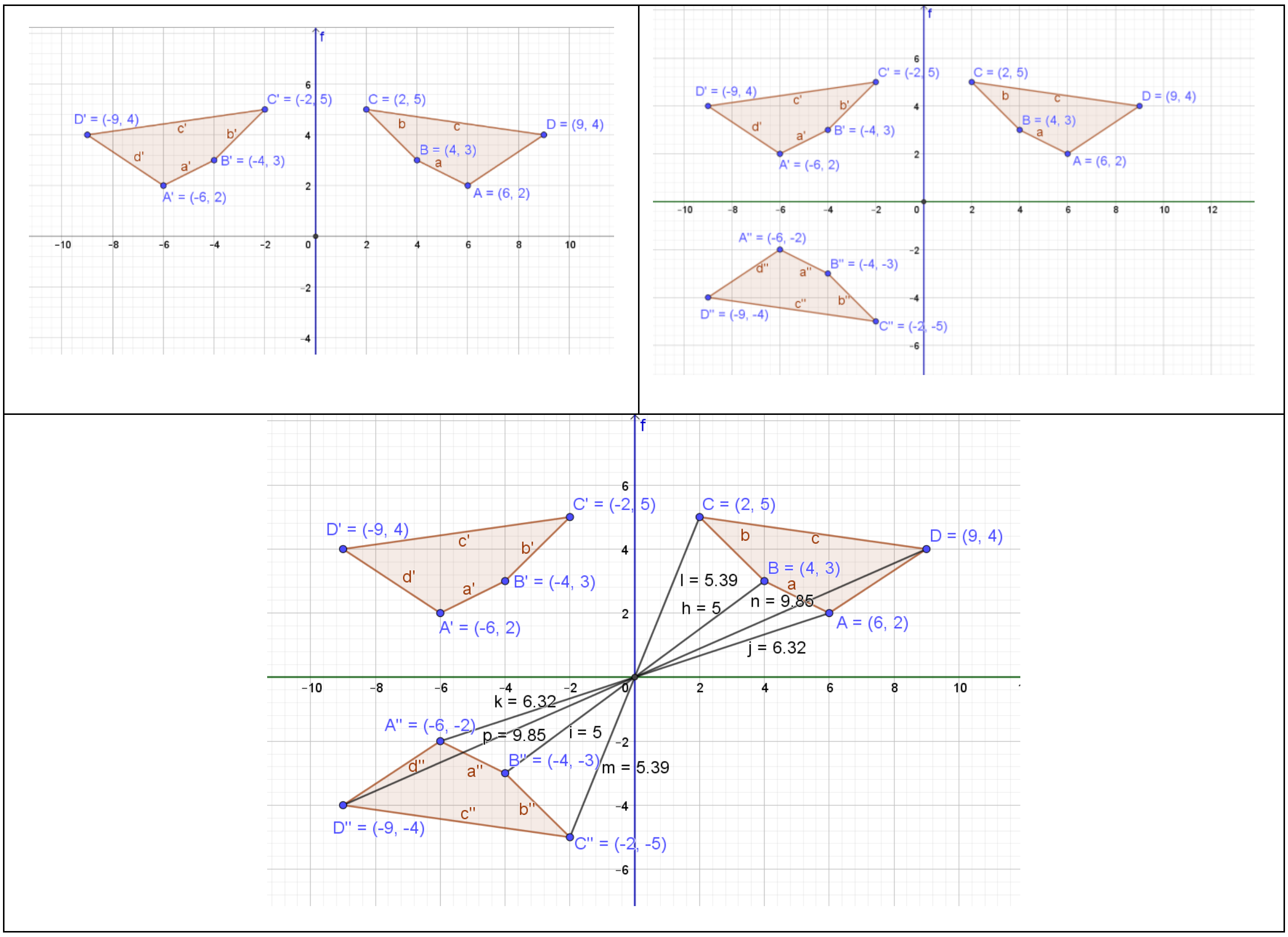
$$A = (6, 2) \rightarrow A' = (2, 6)$$

$$(x, y) \rightarrow (y, x)$$

2. ábra[1]

Az általános iskola ***7. osztályában***, a függvényfogalom bevezetésekor a fenti példák újra használhatók a tanulóknak az egyértelmű hozzárendelésről nyert tapasztalati anyagának gazdagítása céljából, illetve ezekkel még inkább demonstrálható a függvény, mint együttváltozó mennyiségek dinamikus folyamata, illetve mint matematikai objektumnak a többféle reprezentációs módját is célszerű ezen példák keretében együtt alkalmazni. A NAT a ***7-8. osztályos*** korosztályban a középpontos tükrözés fogalmának megismerését is előírja. Ennélfogva a függvényfogalom alakítását megcélozhatjuk ezen téma tárgyalása során is az alábbi középpontos hasonlóság segítségével (3. ábra), felhasználva a függvény reprezentációit is annak érdekében, hogy azok ne izoláltan épüljenek be ismereteikbe. Az animáció a középpontos tükrözéshez az y, majd az x koordináta-tengelyre való tükrözéssel vezeti el a tanulót, és ezzel a függvények kompozíciójának a középiskolában való bevezetését is előkészíthetjük.

[1] Az animáció elérhető a következő linkről: https://www.geogebra.org/m/gcgrgtkp
(Megjegyzés: az adott tükrözés eléréséhez az animációt a 16. szerkesztési lépésnél kell megállítani.)

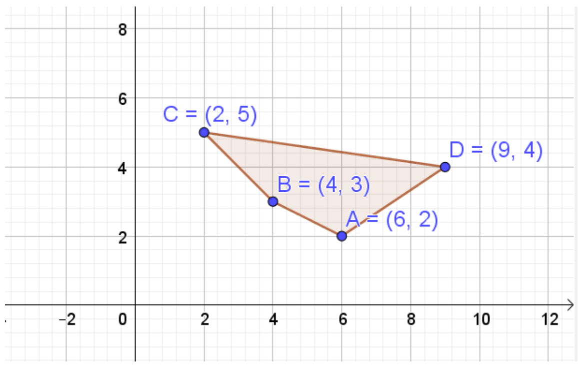


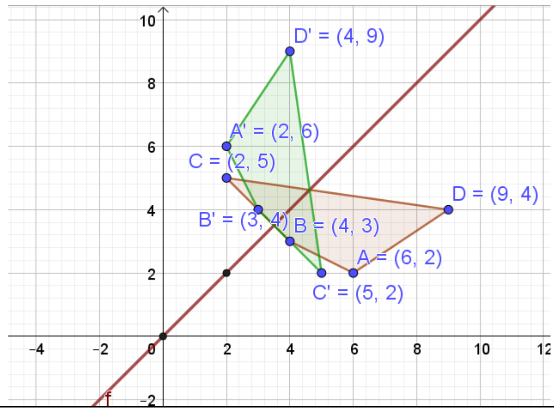
3. ábra[2]

A ***9-10. osztályos*** tananyag a tengelyes és a középpontos tükrözés, az eltolás, a pont körüli elforgatás geometriai transzformációk ismeretét írja elő. A tengelyes tükrözés és pont körüli forgatás egymás utáni bemutatásával (kompozíciójával) a dinamikus szoftver segítségével egyrészt egy geometriai tulajdonság felismerése, másrészt az összetett függvény (függvények kompozíciója) fogalom tapasztalat útján történő megismertetése is megcélozható. Mivel ebben a korosztályban a különböző függvénytranszformációk is a tananyag részei, így egyrészt megmutatható a kapcsolat a különböző függvénytranszformációk (például $-f(x)$, $f(-x)$) és a geometriai transzformációk (például a koordináta-tengelyekre való tükrözés) között: a GeoGebrában elkészített animáció látványossá teszi az „input" és „output" pontok közötti kapcsolatot, az „input" pontok x, illetve y koordinátáinak változását a tükrözés során, továbbá a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét is. A négyszögek csúcspontjai közötti kapcsolat táblázatba rendezésével a transzformáció (függvény) szabálya megadhatóvá válik képlettel is (4. ábra).

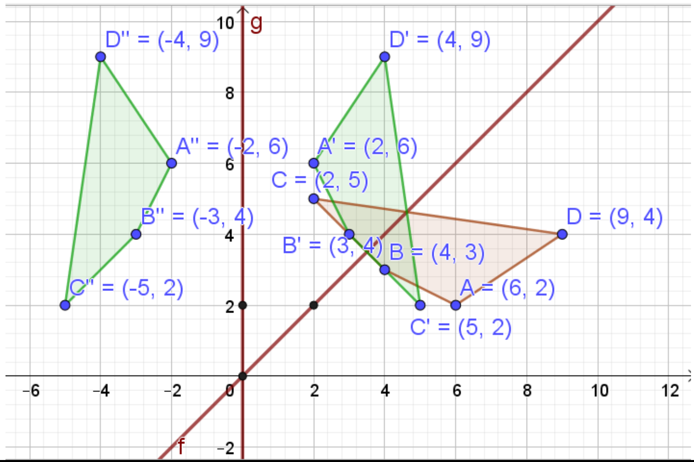
[2] Az animáció az alábbi linkről érhető el: https://www.geogebra.org/m/z3f4vemq

DOI: 10.21791/IJEMS.2020.2.36.

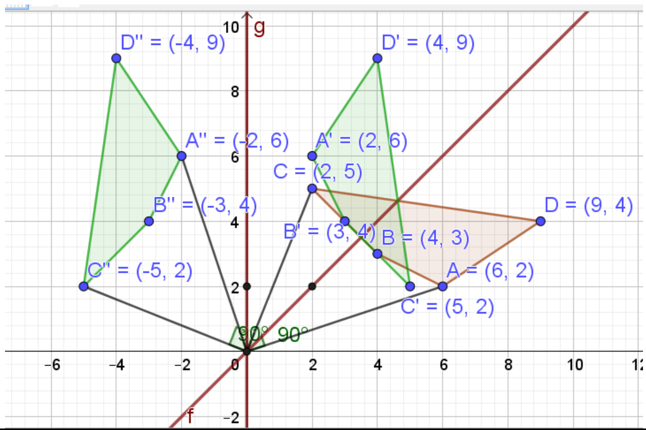




A=(6,2)	B=(4,3)	C=(2,5)	D=(9,4)	$f_1: (x, y) \to (y, x)$
A'=(2,6)	B'=(3,4)	C'=(5,2)	D'=(4,9)	



A'=(2,6)	B'=(3,4)	C'=(5,2)	D'=(4,9)	$f_2: (x, y) \to (-x, y)$
A''=(-2,6)	B''=(-3,4)	C''=(-5,2)	D''=(-4,9)	



A=(6,2)	B=(4,3)	C=(2,5)	D=(9,4)	$f_3: (x, y) \to (-y, x)$
A''=(-2,6)	B''=(-3,4)	C''=(-5,2)	D''=(-4,9)	

4. ábra[3]

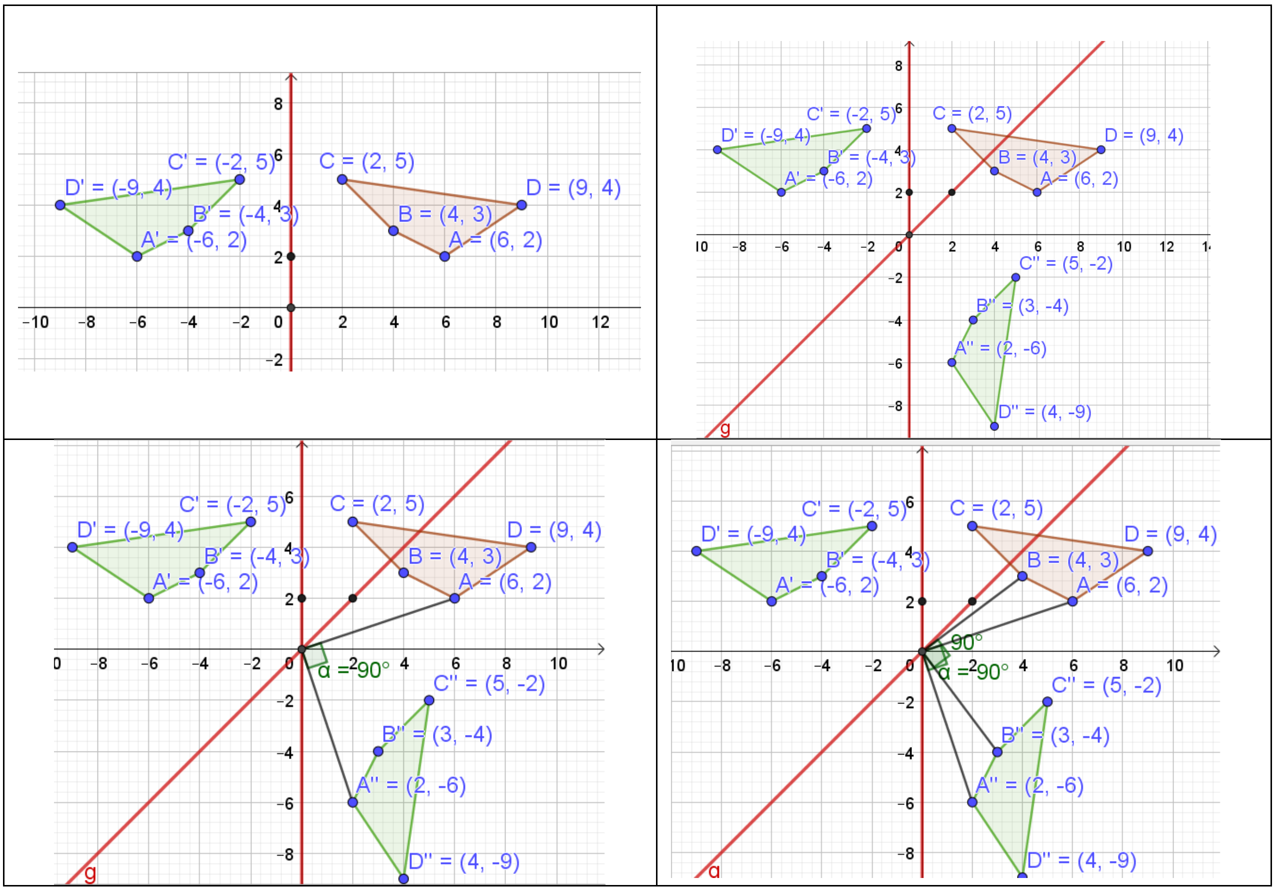
[3] Az animáció elérhető a következő linkről: https://www.geogebra.org/m/gcgrgtkp

DOI: 10.21791/IJEMS.2020.2.36.

Az egyes transzformációk (függvények) szimbólumokkal történő leírása osztálytermi munkában elvégezhető. Továbbá felfedeztethető, hogy az f_1 és f_2 transzformációk, vagyis a tengelyes tükrözések egymás utáni elvégzésével (kompozíciójának képzésével) egy másik geometriai transzformáció fedezhető fel, a forgatás. Tehát két metsző tengelyű tengelyes tükrözés szorzata (kompozíciója) elforgatás. A kompozíció szimbólumokkal történő leírása ebben a korosztályban matematika iránt érdeklődő tanulók számára lehet releváns:

$$f_2 \circ f_1(x,y) = f_2(f_1(x,y)) = f_2(y,x) = (-y,x) = f_3(x,y)$$

Az alábbi animáció segítségével vizuálhatjuk, hogy a transzformációk sorrendje a kompozíció (az összetett függvény) képzésében fontos és általában nem felcserélhető (5. ábra).



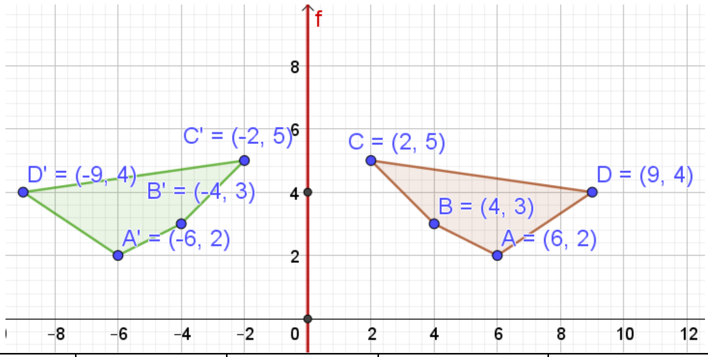
5. ábra[4]

$$f_1 \circ f_2(x,y) = f_1(f_2(x,y)) = f_1(-x,y) = (y,-x)$$

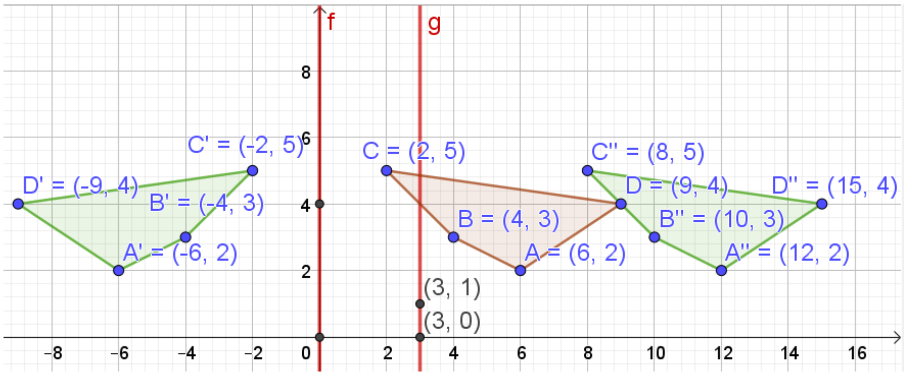
Az előző példához hasonló módon, az összetett függvény ***11-12. osztályokban*** való tárgyalása során ezen fogalom, továbbá az eltolás, mint geometriai transzformáció fogalmának elmélyítését segítheti az alábbi animáció. Az egyes transzformációk egymás utáni elvégzésével fedeztethető fel a tanulókkal, hogy két párhuzamos tengelyű tengelyes tükrözés kompozíciója az eltolás (6. ábra).

[4] Az animáció elérhető a következő linkről: https://www.geogebra.org/m/tewzn5pq

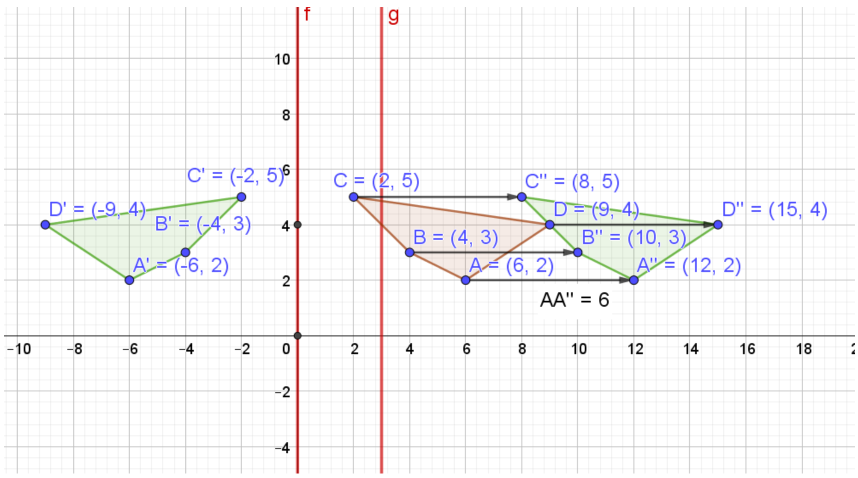
DOI: 10.21791/IJEMS.2020.2.36.



A=(6,2)	B=(4,3)	C=(2,5)	D=(9,4)	$g_1: (x, y) \rightarrow (-x, y)$
A'=(-6,2)	B'=(-4,3)	C'=(-2,5)	D'=(-9,4)	



A'=(-6,2)	B'=(-4,3)	C'=(-2,5)	D'=(-9,4)	$g_2: (x, y) \rightarrow (-x + 6, y)$
A''=(12,2)	B''=(10,3)	C''=(8,5)	D''=(15,4)	



A=(6,2)	B=(4,3)	C=(2,5)	D=(9,4)	$g_3: (x, y) \rightarrow (x + 6, y)$
A''=(12,2)	B''=(10,3)	C''=(8,5)	D''=(15,4)	

6. ábra[5]

Az animáció segítségével célszerű ebben a korosztályban a kompozícióképzést szimbólumokkal is bemutatni annak érdekében, hogy a tanulók meglássák a kapcsolatot a geometriai függvények és a

[5] Az animáció elérhető a következő linkről: https://www.geogebra.org/m/aakkttb8

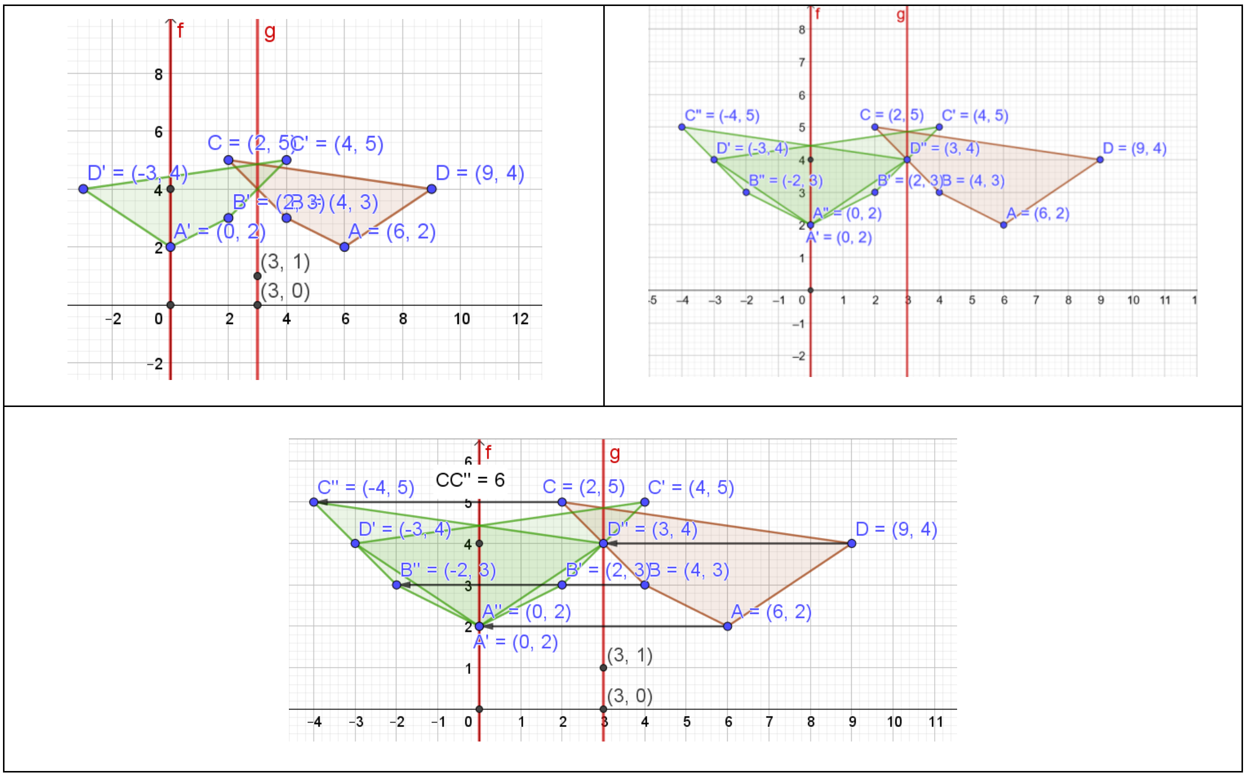
DOI: 10.21791/IJEMS.2020.2.36.

numerikus függvények helyettesítési értékének meghatározása között és képesek legyenek dolgozni a szimbólumokkal a geometriai függvények területén is:

$$g_2 \circ g_1(x,y) = g_2(g_1(x,y)) = g_2(-x,y) = (x+6,y) = g_3(x,y)$$

Ugyancsak igazolható a következő animáció segítségével, hogy a fenti kompozíció képzésében a sorrend nem felcserélhető (7. ábra), tehát

$$g_1 \circ g_2\,(x,y) = g_1(g_2(x,y)) = g_1(-x+6,y) = (x-6,y)$$



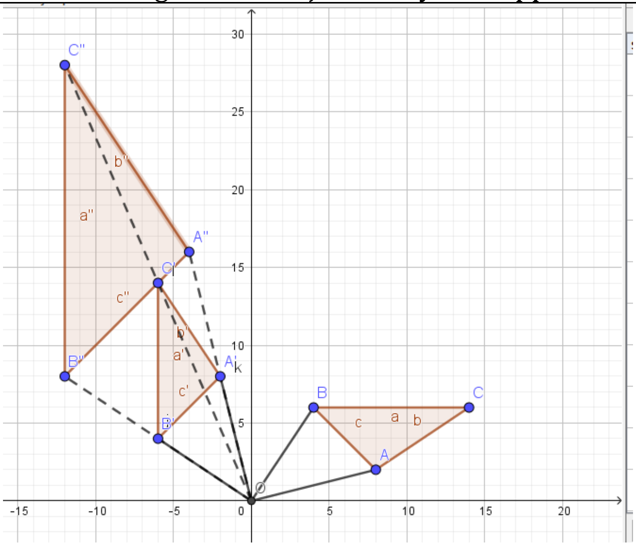
7. ábra[6]

A fenti kompozíció megadása után az alábbi animácó felhasználható az adott korosztályban a geometriai transzformációk kompozíciójának szimbólumokkal történő leírásának gyakorlása céljából, illetve példaként szolgálhat arra, hogy vannak olyan kompozíciók, melyek képzésében a sorrend felcserélhető (8., 9. ábra).

[6] Az animáció elérhető a következő linkről: https://www.geogebra.org/m/cjnkasnm

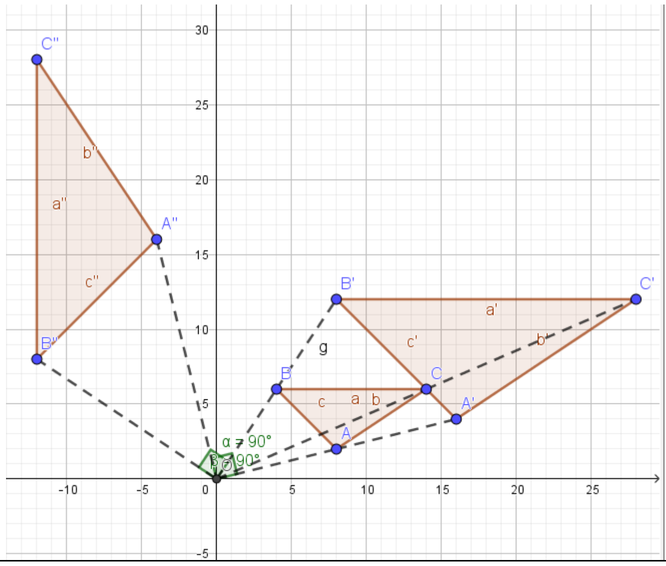
DOI: 10.21791/IJEMS.2020.2.36.

Forgatás 90°-kal az origó körül, majd 2 arányú középpontos hasonlóság



8. ábra[7]

2 arányú középpontos hasonlóság, majd forgatás 90°-kal az origó körül



9. ábra[8]

3. Összegzés

A műszaki tudományok területét "átszövik" a függvények és a geometriai transzformációk. Bár ezek szoros kapcsolatban állnak egymással, mégis a közoktatásban gyakorta izoláltan kerülnek tárgyalásra, melynek következménye lehet, hogy a felsőoktatásba belépő hallgatóknál az $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vagy $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ típusú függvények megértése nehézségekbe ütközik. Jelen tanulmányban az általános és középiskolás korosztályoknak ajánlva mutattunk be dinamikus matematikai szoftverrel készített animációkat,

[7] Az animáció elérhető a következő linkről: https://www.geogebra.org/m/y5j5mvyg
[8] Az animáció elérhető a következő linkről: https://www.geogebra.org/m/pyrzmkec

példákat arra vonatkozóan, hogy a különböző geometriai transzformációk tanítási-tanulási folyamatában hogyan alakítható a függvény fogalma is és fejleszthető a tanulóknak az a képessége, hogy alkalmazni tudják annak többféle reprezentációját és át tudjanak térni egyik reprezentációs módból egy lehetséges másikba. A tanulók függvényfogalmi képzetének ily módon való „gazdagítása" hozzájárulhat egyrészt ahhoz, hogy meglássák az iskolai matematika tananyagok közötti kapcsoltot, másrészt a mérnöki képzésben a kapcsolódó szakmai új ismeretek elsajátításához.

Köszönetnyilvánítás

A publikáció elkészítését az EFOP-3.6.1-16-2016-00022 számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

Hivatkozások

[1] Á. Tuke, O. Oppe, G. Dávid, *Oktatás-módszertani füzetek*. PTE Bölcsészettudományi Kar Politikai Tanulmányok Tanszék, 2011.

[2] Ambrus, A., *Bevezetés a matematikadidaktikába*. Eötvös Kiadó, revised, 2004.

[3] Areti P., Paraskevi M., Andreas P., Teaching the concept of function: Definition and problem solving. Konrad Krainer; Nada Vondrova. CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Feb 2015, Prague, Czech Republic. pp.440-445, *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.*

[4] Clement, L., What do students really know about functions? *Mathematics Teacher*, 94(9), 745–748., 2001.

[5] Dienes, Z., *Építsük fel a matematikát*. Edge 2000 Kiadó, 2015.

[6] Dubinsky, E. & Harel, G., The nature of the process conception of function. In G. Harel and E. Dubinsky (eds.), *The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 85-106). DC: Mathematical Association of America, 1992.

[7] Duval, R., Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In *Proceedings of the 21st North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Morelos, Mexico, 3-26, 1999.

[8] Sajka, M., A secondary school student's understanding of the concept of function - A case study. *Educational Studies in Mathematics, 53,* 229–254, 2003.

[9] Scott N. Steketee (2012). Using Technology to Integrate Geometry and Algebra in the Study of Functions. In Sung Je Cho (Ed.), The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education, pp. 617-620.

[10] Selden, A. & Selden, J., Research Perspectives on Conceptions of Functions: Summary and Overview. In Harel, G. & Dubinsky, E. (eds.) *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy.* Mathematical Association of America, 1-16., 1992.

DOI: 10.21791/IJEMS.2020.2.36.

[11] Sfard, A., On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics* 22, 1–36., 1991.

[12] Sierpinska, A., On understanding the notion of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy (p. 25-58). Washington: DC: Mathematical Association of America, 1992.

[13] Skemp, R.R., *A matematikatanulás pszihológiája* (S. Klein, ford.). Edge 2000 Kiadó, Budapest, 2005. (Eredeti könyv publikálva1971-ben.)

[14] Szanyi, Gy., Általános iskolás tanulók és egyetemi hallgatók fogalomképzetei a függvényről. *INTERNATIONAL JOURNAL OF ENGINEERING AND MANAGEMENT SCIENCES / MŰSZAKI ÉS MENEDZSMENT TUDOMÁNYI KÖZLEMÉNYEK 2:(2*), 14-122, 2017b.

[15] Szanyi, Gy., Fogalomképzetek és definíciók a függvényről. *In Imre Kocsis (ed.), Proceedings of the Conference on Problem-based Learning in Engineering Education* (pp. 36-41). Debrecen, 2015.

[16] Thompson, P.W., Students, functions, and the undergraduate curriculum. In Dubinsky, E., Schoenfeld, A., Kaput, J. (eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, I, CBMS Issues in Mathematics Education*, Vol. 4, 21–44, 1994.

[17] Vinner, S. & Dreyfus, T., Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356–366., 1989.

[18] Vinner, S., Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14, 293-305., 1983.

[19] Nachlieli, T. & Tabach, M. (2012). Growing mathematical objects in the classroom – The case of function. *International Journal of Educational Research*, 51-52, 10-27.

[20] Kerettanterv az általános iskola 5-8. osztálya számára. https://kerettanterv.oh.gov.hu/02_melleklet_5-8/index_alt_isk_felso.html

[21] Kerettanterv a gimnáziumok 9-12. osztálya számára. https://kerettanterv.oh.gov.hu/03_melleklet_9-12/index_4_gimn.html