

# Egy gazdaságmatematikai modell

## An economical mathematics model

KÉZI Cs.

University of Debrecen, kezicsaba@science.unideb.hu

*Absztrakt. Az NTP-NFTÖ-17-C-159 azonosítószámú pályázat keretében az egyik fő feladatom, hogy bemutassam a középiskolai és felsőoktatási matematikaoktatás alkalmazási lehetőségeit. Ezen kívül szeretném szemléltetni, hogy sok esetben a matematikai szoftverek alkalmazása mennyire hasznos és bizonyos esetekben nélkülözhetetlen egy összetett probléma megoldásánál.*

*Abstract. In the frame of the project NTP-NFTÖ-17-C-159, one of my main tasks is to present the possible applications of teaching mathematics in high schools and in higher education. Beside this, I would like to illustrate that, in many cases, how useful and, in certain cases, indispensable the use of mathematical softwares is during the solution of a complex problem.*

## Bevezetés

Az NTP-NFTÖ-17-C-159 azonosítószámú pályázat keretében az a célkitűzésem, hogy a középiskolai és felsőoktatási matematika minél inkább alkalmazásorientált legyen. Fontos, hogy a középiskolai tanulók és a felsőoktatási hallgatók ne csak úgy éljék meg a matematika tanulását, hogy az értelmetlen, használhatatlan, hanem lássák a különböző tantárgyakban és a való életben való alkalmazásait.

Fontos megemlíteni azt is, hogy bizonyos esetekben a felmerülő számolásokat alkalmas matematikai szoftver segítségével (például GeoGebra, Excel, Maple, Matlab) lényegesen egyszerűbb elvégezni, mint „kézzel”, papíron számolni. Gondoljunk például arra, hogy a gazdasági, műszaki számításokban sokszor előfordulhat magasabb fokú egyenlet, aminek a megoldására csak közelítő eljárások léteznek. Az ilyen jellegű feladatok, „hagyományos” úton történő, „papír alapú” megoldása meglehetősen időigényes lenne.

Jelen cikkben egy összetettebb gazdasági feladat matematikai modellezését mutatom be. A feladat megoldásában a bonyolultabb, időigényes számolásokat, továbbá a függvények ábrázolását matematikai szoftver segítségével végeztem.

## 1. A feladat megfogalmazása

Egy gazdasági vállalat egyik fő profilja, hogy LED TV-eket forgalmaznak. Egy adott évben januártól júniusig az adott hónapok első napjain megváltoztatták a termék árát, majd a hónap végén feljegyezték, hogy az adott hónapban hány darabot adtak el a TV-ből. Kíváncsiak voltak arra, hogy a

termék ára hogyan befolyásolja a termék iránti keresletet. Az említett hónapokban a termék árát és a keresletet az alábbi táblázat mutatja:

	Ár (Ft)	Eladott mennyiség (db)
január	150 000	500
február	160 000	480
március	170 000	460
április	175 000	410
május	180 000	400
június	185 000	300

1. táblázat

Ábrázolni fogjuk az adatoknak megfelelő  $(x_i; y_i)$  pontokat a kétdimenziós Descartes-féle koordináta-rendszerben úgy, hogy az  $x_i$  ( $i = 1,2,3,4,5,6$ ) értékek az egyes hónapokban a termék ára, míg az  $y_i$  ( $i = 1,2,3,4,5,6$ ) értékek a megfelelő hónapokban az eladott mennyiségek.

Feltételezzük, hogy az eladott mennyiséget a termék árán kívül egyéb tényezők nem befolyásolták.

Megadjuk a pontokat a négyzetes hibafüggvény szerint legjobban közelítő  $f(x) = a + b \cdot \frac{1}{x^2}$  alakú függvényt, ami azt jelenti, hogy keressük az  $f(x) = a + b \cdot \frac{1}{x^2}$  függvény ismeretlen  $a$  és  $b$  paramétereit úgy, hogy a

$$g(x) = \sum_{i=1}^6 (f(x_i) - y_i)^2$$

hibafüggvény értéke minimális legyen.

Megadjuk a keresleti függvény elaszticitás függvényét.

Ismert a kínálati függvény is:

$$h(x) = \frac{45}{14}x.$$

Meghatározzuk a keresleti függvény és kínálati függvény grafikonjának metszéspontját, azaz az egyensúlyi árat és az egyensúlyi mennyiséget.

A keresleti függvény ismeretében megadjuk a bevételi függvényt. A bevételi függvény ismeretében meghatározzuk, hogy hány darab termék eladása esetén lesz maximális a bevétel, majd megadjuk a maximális bevételt.

## 2. A közelítő hatványfüggvény megadása

Megadjuk a négyzetes hibafüggvény szerint az  $(x_i; y_i)$  pontokat legjobban közelítő

$$f(x) = a + \frac{b}{x^2}$$

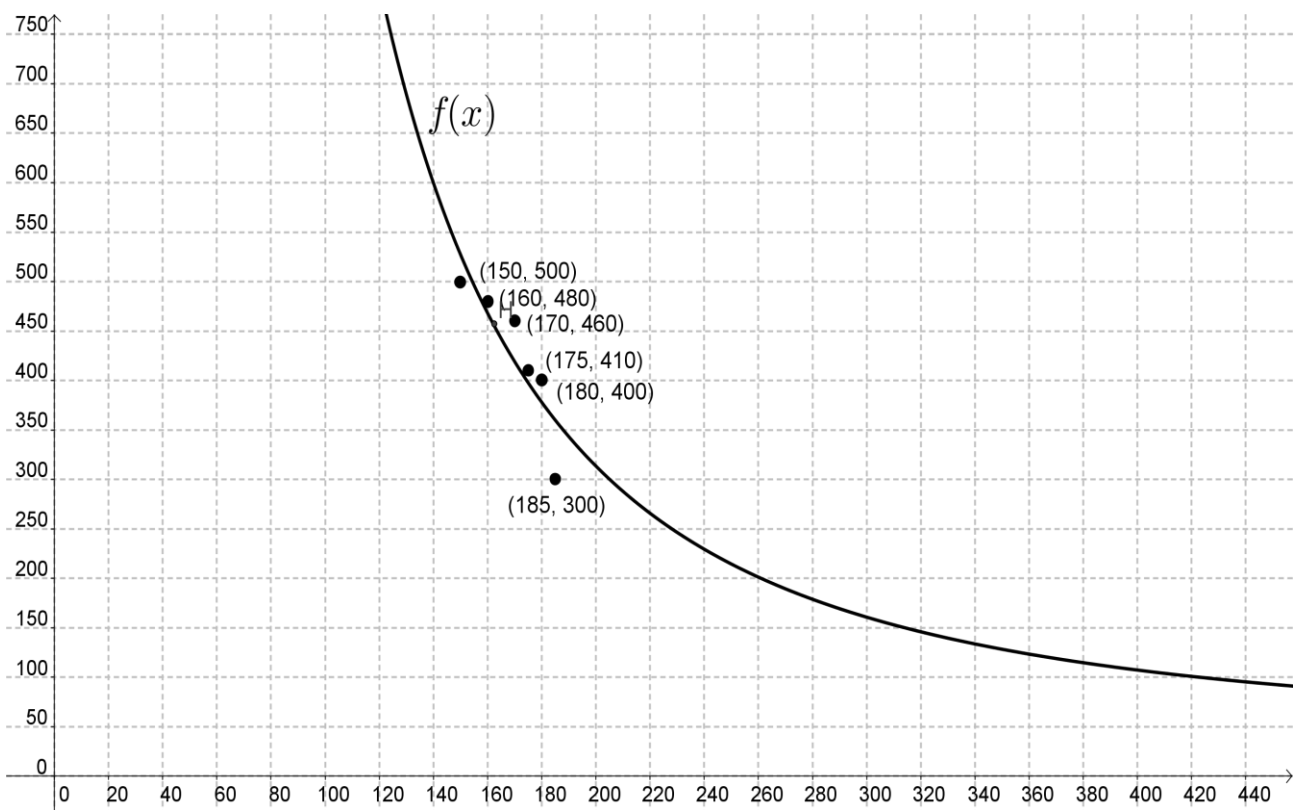
függvény ismeretlen paramétereit. A számolást a legkisebb négyzetek módszere segítségével vagy a Gauss-féle normál egyenletrendszer megoldásával végezhetnénk el. Ezek helyett most matematikai szoftver segítségével végezzük a számolást. A Maple 14 szoftverben a LeastSquares parancsot alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$a \approx 38,55 ; b \approx 10\,997\,246,$$

tehát a keresleti függvény:

$$f(x) = 38,55 + \frac{10\,997\,246}{x^2}.$$

Az  $(x_i; y_i)$  pontok és a keresleti függvény ábrázolását GeoGebra szoftver segítségével végezzük:



1. ábra

### 3. Az elaszticitás függvény

Mivel

$$f'(x) = -\frac{21\,994\,492}{x^3},$$

ezért az elaszticitás függvény:

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = -\frac{x}{38,55 + \frac{10\,997\,246}{x^2}} \cdot \frac{21\,994\,492}{x^3}.$$

Az egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy

$$E(x) = -\frac{x}{\frac{38,55x^2 + 10\,997\,246}{x^2}} \cdot \frac{21\,994\,492}{x^3} = -\frac{21\,994\,492}{38,55x^2 + 10\,997\,246}.$$

#### 4. Egyensúlyi mennyiség, egyensúlyi ár

Az egyensúlyi mennyiséget és egyensúlyi árat a keresleti és kínálati függvény grafikonjának metszéspontja adja. A metszéspont meghatározásához meg kell oldanunk az  $f(x) = h(x)$  egyenletet.

Tehát meg kell oldanunk a

$$38,55 + \frac{10\,997\,246}{x^2} = \frac{45}{14} \cdot x$$

egyenletet. A közös nevezővel való szorzás után azt kapjuk, hogy

$$539,7x^2 + 153\,961\,444 = 45x^3.$$

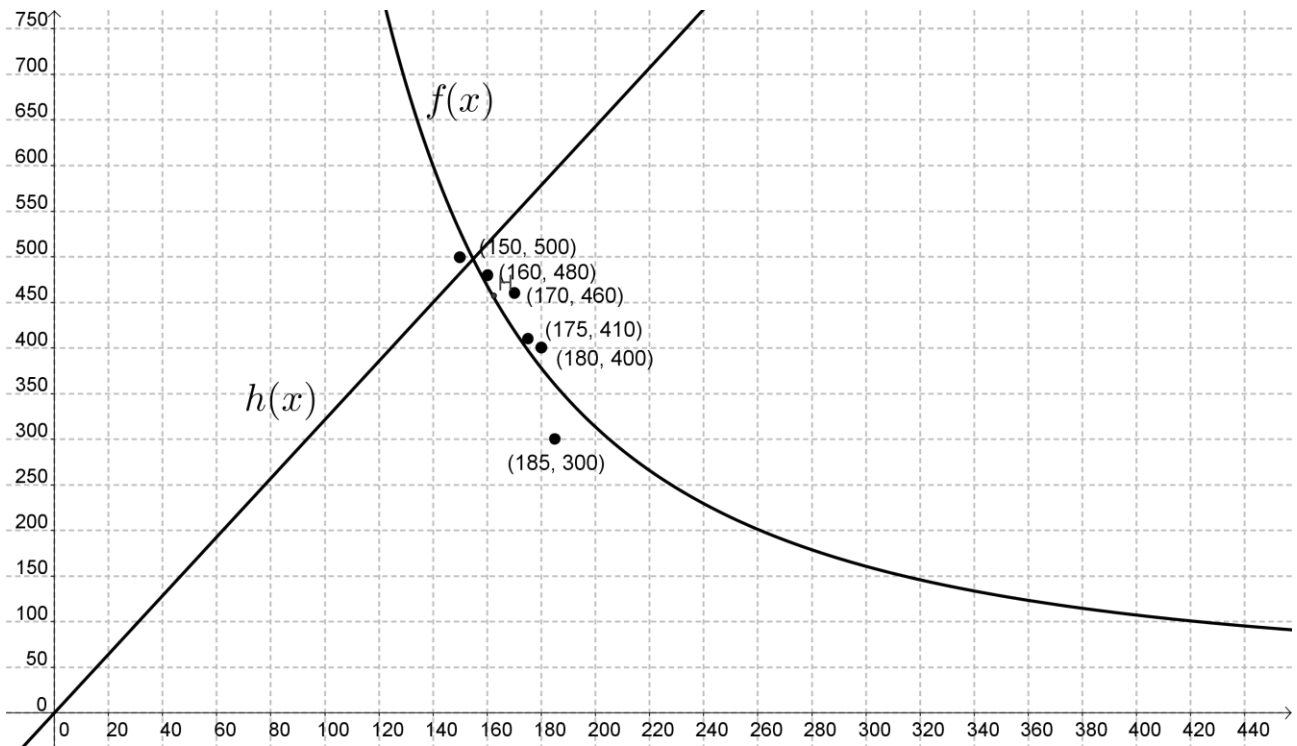
Az egyenletet nullára rendezve

$$45x^3 - 539,7x^2 - 153\,961\,444 = 0$$

adódik. Az egyenlet megoldását a Wolfram Alpha matematikai szoftver segítségével végezzük. Eredményként azt kapjuk, hogy  $x \approx 154,789$ .

Tehát az egyensúlyi ár 154 789 forint.

Az alábbi ábra mutatja a keresletet az ár függvényében a vizsgált 6 hónap alatt, továbbá a keresleti függvényt és a kínálati függvényt:



2. ábra

Az egyensúlyi mennyiség

$$h(154,789) = \frac{45}{14} \cdot 154,789 \approx 497,54,$$

tehát 498 termék az egyensúlyi mennyiség.

## 5. A bevételi függvény maximuma

A bevételi függvény:

$$B(x) = x \cdot f(x) = x \cdot \left( 38,55 + \frac{10\,997\,246}{x^2} \right) = 38,55x + \frac{10\,997\,246}{x}.$$

A bevételi függvény maximumának megkereséséhez megoldjuk a  $B'(x) = 0$  egyenletet.

A  $B(x)$  bevételi függvény deriváltja:

$$B'(x) = 38,55 - \frac{10\,997\,245}{x^2}.$$

A  $B'(x)$  függvény zérushelye

$$38,55 - \frac{10\,997\,245}{x^2} = 0 \Rightarrow 38,55x^2 = 10\,997\,245 \Rightarrow x^2 = 285\,272 \Rightarrow x = \pm 534.$$

Az egyenlet megoldását a pozitív számok halmazán keressük, így azt kapjuk, hogy 534 darab LED TV esetén lesz maximális a bevételünk. Ekkor a maximális bevétel:

$$B(534) = 38,55 \cdot 534 + \frac{10\,997\,246}{534} = 41\,179,794.$$

Tehát a bevétel: 41 179 794 forint.

## Összegzés

A cikkben látható, hogy egy összetettebb gazdasági feladat megoldásához sokféle matematikai eszközt kell felhasználnunk. Jelen esetben több olyan lépéssel is találkoztunk, amelyekben a hagyományos, papír alapú” számolás meglehetősen időigényes lenne, ezért matematikai szoftvereket alkalmaztunk.

## Köszönetnyilvánítás

A publikáció elkészítését az NTP-NFTÖ-17-C-159 azonosítójú pályázat támogatta.



## Hivatkozások

- [1] H. Czédli – Zs. Varga (2017) *Zöldfelületek szerepének elemzése urbanizált környezetben*. Klímaügyeink 2017. május 25. Nemzeti Közszolgálati Egyetem, Nemzetközi Tudományos Konferencia.
- [2] Gy. Darai – G. Filep – R. Nagy-Kondor – G. Á. Szíki (2015) *Dynamics Experiments Applying NI Devices and LabVIEW*. Proceedings of the 3rd International Scientific Conference on Advances in Mechanical Engineering (ISCAME 2015), ISBN 978-963-473-917-3, pp. 38-43.
- [3] B. Józsa – Cs. G. Kézi (2017) *Matematika a kémiában alap-, közép-, és felsőfokon*. Proceedings of the Conference on Problem-based Learning in Engineering Education, Debrecen, 2017.
- [4] R. Nagyné Kondor – G. Á. Szíki (2009) *Matematikai eszközök mérnöki alkalmazásokban I.*, DE MK, Ceze Kft., ISBN 978-963-88614-0-5
- [5] G. Á. Szíki – R. Nagyné Kondor – Cs. G. Kézi (2017) *Matematikai eszközök mérnöki alkalmazásokban*, Debreceni Egyetemi Kiadó.