International Journal of Engineering and Management Sciences (IJEMS) Vol. 2. (2017). No. 2.
DOI: 10.21791/IJEMS.2017.2.12.

Egy matematika jegyzetről mérnökhallgatóknak
About a math textbook for engineering students

A. VARGA

Debreceni Egyetem, Műszaki Kar, Műszaki Alaptárgyi Tanszék, vargaa@eng.unideb.hu

Absztrakt. Mennyire oktassuk a matematikát precízen? Milyen mértékű legyen az alkalmazás-orientáltság? Megkíséreljük megválaszolni e kérdéseket néhány illusztratív példával, melyeket a mérnökhallgatók oktatásánál motiválásként használhatunk. Egy elkészült jegyzetet mutatunk be, mely a Debreceni Egyetem Műszaki Karán folyó mérnökképzés során elsajátítandó, haladottabb matematikai kurzusok anyagába nyújt betekintést.

Abstract. What is the optimal amount of the theory in engineering mathematics education? How to be precise and effective at the same time? We present an attempt to answer these questions by a textbook containing higher level mathematics, especially calculus, for engineering students.

Bevezetés

A Debreceni Egyetem Műszaki Karának Műszaki Alaptárgyi Tanszékén oktatók alapozó kurzusokat tartanak, főként matematika, fizika és informatika területekből. Az egyik legfontosabb törekvés a mérnök kollégák munkájának minél hatékonyabb támogatása.

A hatékony matematikaoktatás egyik kulcsa a mérnökszakma igényeinek követése, másrészt pedig az absztrakt elmélet, illetve a szemléletes megközelítés közötti összhang megteremtése. E dolgozat célja, hogy bepillantást nyújtson az [1] egyetemi jegyzetbe, mely kísérletet tesz a ''többváltozós függvények differenciál- és integrálszámítása'' témakör feldolgozására. A jegyzetből néhány részletet kiragadunk és ötletet adunk a matematika két kisebb témakörének, a görbék és a felületek műszaki felsőoktatásban történő feldolgozására.

1. Görbék és felületek

A szerszámfelületek nagyrészt önmagukban elmozgatható felületek. Általában vagy forgásfelületek, vagy csavarfelületek. A tér- és síkgörbék precíz matematikai leírásának oktatása számos példával indokolható. Például felületek köszörűkoronggal való megmunkálásakor az úgynevezett hipocikloisok, érintőseregek és normálisseregek fontos szerephez jutnak.

DOI: 10.21791/IJEMS.2017.2.12.

1.1. Görbék

1.1.1. Matematikai háttér

A továbbiakban az $\bar{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \bar{r}(t) = x(t) \cdot \bar{\imath} + y(t) \cdot \bar{\jmath}$ jelölést használjuk, ahol az $\bar{r}$ függvény koordinátafüggvényei az $x, y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények egyváltozós, valós értékű függvények.

A differenciálszámítás eszközeinek hatékony használatához görbén az alábbit értjük:

Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nem feltétlenül korlátos, nem egypontú intervallum, $n = 2$ vagy 3. Egy $\bar{r}: I \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható leképezést parametrizált görbének nevezünk, ha minden $t \in I$ re teljesül az $\bar{r}'(t) \neq 0$ úgynevezett regularitási feltétel. Az I-t paramétertartománynak nevezzük. A leképezés képhalmazát mondjuk ilyenkor röviden görbének. $n = 2$ esetén síkgörbéről, $n = 3$ esetén térgörbéről beszélünk. Általánosságban síkgörbéről beszélünk akkor is, ha $\bar{r}$ képét $\mathbb{R}^3$ egy síkja tartalmazza.

A gyakorlatban gyakran beszélünk görbéről akkor is, ha a definícióban szereplő differenciálhatósági és regularitási feltételek csak szakaszonként teljesülnek, azaz ún. szakaszonként sima parametrizált görbék.

Adott görbének végtelen sok paraméterezése létezik. A különböző előállításokban általában különbözik egy adott görbeponthoz tartozó érintővektor hossza. Ez egy mozgó pont hely-idő függvénye esetén ugyanazon pálya különböző sebességgel való befutásának felel meg a fizikában.

Vannak olyan helyzetek, amikor csak a pálya alakjáról, geometriai tulajdonságairól szeretnénk pontos képet kapni: mennyire görbe, mennyire csavarodik a térben, mennyi a hossza. Ezeknek a kérdéseknek a megválaszolásához olyan mennyiségeket vezetünk be, melyek paramétertranszformációval szemben invariánsak.

Differenciálható tér- és síkgörbe esetén azt az előállítást, melynél az érintővektor hossza bármely pontban egységnyi, ívhossz-paraméteres előállításnak nevezzük. A görbeelmélet olyan mennyiségeket keres, amelyek függetlenek a paraméterezéstől. Az ívhossz ilyen tulajdonságú.

Azt, hogy egy görbe egy adott helyen mennyire tér el az egyenestől, a görbülettel mérjük. A görbület az érintő vektor irányának megváltozásával függ össze. A görbület egy adott paraméterű pontban kizárólag a görbe alakjától függ és nem a paraméterezéstől.

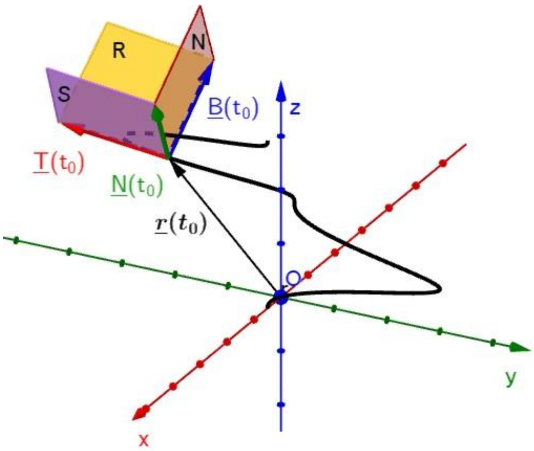
Egy $\bar{r}: I \to \mathbb{R}^3$ görbét biregulárisnak mondunk, ha bármely $t \in I$-re $\bar{r}'(t)$ és $\bar{r}''(t)$ lineárisan független, azaz $\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t) \neq \bar{0}$. Egy bireguláris görbe görbületfüggvénye: $\kappa(t) := \frac{|\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)|}{|\bar{r}'(t)|^3}$.

A

$$\bar{T}(t) := \frac{1}{|\bar{r}'(t)|} \cdot \bar{r}'(t), \qquad \bar{N}(t) := \bar{B}(t) \times \bar{T}(t), \qquad \bar{B}(t) := \frac{1}{|\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)|} \cdot \bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)$$

vektorhármas a fenti sorrendben jobbsodrású egységvektor-rendszert alkot, melyet a görbe kísérő triéderének szokás nevezni. $\bar{T}(t)$a t paraméterhez tartozó érintő egységvektor, $\bar{B}(t)$ a t paraméterhez tartozó binormális egységvektor, $\bar{N}(t)$a t paraméterhez tartozó főnormális egységvektor.

A görbe $\bar{r}(t_0)$pontjában a simulósíkot az $\bar{T}(t_0)$ és $\bar{N}(t_0)$ vektorok feszítik ki, a sík egy normálvektora $\bar{B}(t_0)$ *(lásd 1. Ábra).*



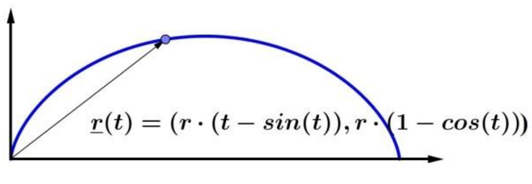
1. Ábra: Kísérő triéder.

Azt, hogy egy görbe mennyire csavarodik, a torzióval mérjük. A torzió a binormális vektor irányának változásával függ össze: a görbe mennyire tér el a simulósíkjától. Ha a görbe háromszor differenciálható és az első és a második deriváltak vektori szorzata nem tűnik el, akkor a torzió:

$$\tau(t) := \frac{\bar{r}'(t)\bar{r}''(t)\bar{r}'''(t)}{|\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)|^2}$$

1.1.2. Műszaki alkalmazások

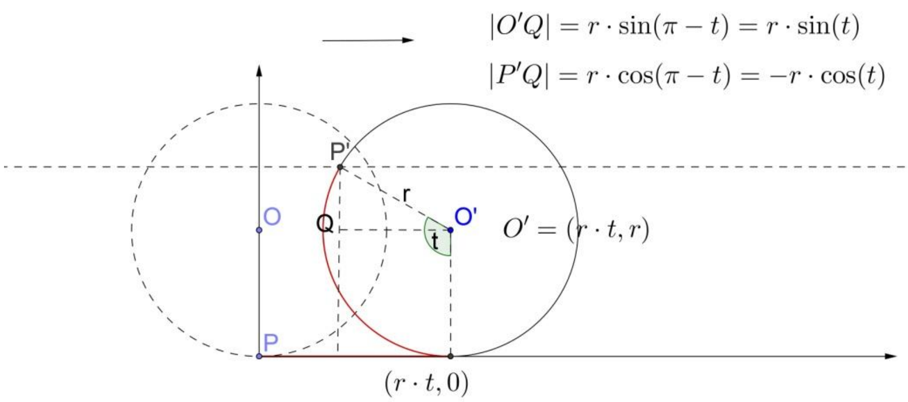
Ha $t \to \bar{r}(t)$ egy mozgó pont hely-idő függvénye, akkor a definícióban szereplő ún. regularitási feltétel azt jelenti, hogy a mozgó pont sebessége egy pillanatban sem lehet nulla, így a pályán nem fordulhat vissza. Például egy csúszásmentesen gördülő kerék egy pontjának – mint egy körvonal P pontjának – pályája az egyszerű ciklois (lásd 2. Ábra).



2. Ábra: Az egyszerű ciklois.

A műszaki példa motiválja azt, hogy a pályát leírjuk a matematika eszközeivel (lásd 3. ábra).

DOI: 10.21791/IJEMS.2017.2.12.

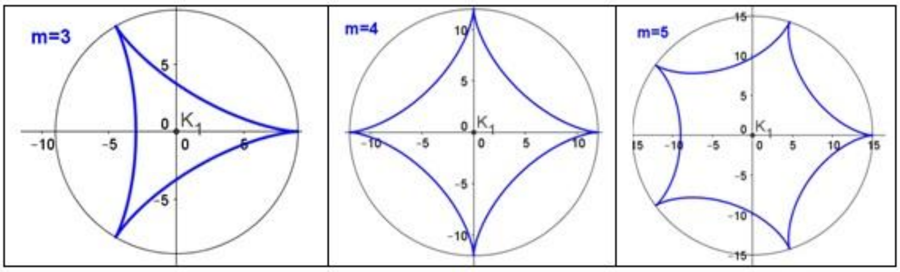


3. *Ábra: Az egyszerű ciklois paraméterezése.*

A bevezetésben említett hipocikloisok úgy származtathatók, hogy egy körvonalon belül csúszásmentesen legördítünk egy másik kört. A gördülő kör egy kerületi pontjának nyomvonala a hipociklois. Ha r_1 jelöli a nagy, r_2 a kis kör sugarát, akkor

$$\bar{r}(t) = \left(r_2 \cdot (m-1) \cdot \cos(t) + \frac{\cos((m-1)\cdot t)}{m-1}\right) \cdot \bar{\imath} + \left(r_2 \cdot (m-1) \cdot \sin(t) + \frac{\sin((m-1)\cdot t)}{m-1}\right) \cdot \bar{\jmath}$$

ahol $r_1 = m \cdot r_2$. Ha m egész szám, akkor $\bar{r}$ képe zárt és m darab „csúcsa'' van ($\bar{r}$ nem differenciálható a csúcspontokban; lásd 4. *Ábra*).



4. *Ábra: Hipocikloisok .*

Ha $t \to \bar{r}(t)$ egy mozgó pont hely-idő függvénye, akkor a $t \to \bar{r}'(t)$ a sebesség-idő függvény. A sebesség változási gyorsaságát a gyorsulás adja meg, azaz a $t \to \bar{r}''(t)$ függvény a gyorsulás-idő függvény.

Mit jelent a mechanikában, hogy a pálya egy bireguláris görbe? A t_0 időpillanatbeli gyorsulásvektort két komponensre szokás bontani: egy érintő- és egy rá merőleges irányú komponensre. Jelöléseinkkel: $\bar{r}''(t_0) = a_T \cdot \bar{T}(t_0) + a_N \cdot \bar{N}(t_0)$. Az érintő irányú komponens a pillanatnyi sebesség nagyságára hat, a másik pedig a pillanatnyi mozgásirányra. A görbe alakja szempontjából nyílván az utóbbinak van jelentősége. Ha $\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t) = \bar{0}$ bármely t időpillanatban, akkor a gyorsulásvektornak csak érintő irányú komponense van, így a mozgás egyenesvonalú.

DOI: 10.21791/IJEMS.2017.2.12.

A kísérő triéder, illetve a torzió fontos szerephez jut például az átmenetívek tervezésénél a vasútépítésben.

1.2. Felületek

Másodrendű felületekkel az építészetben (lásd 5. Ábra), csavarfelületekkel a műszaki gyakorlatban meglehetősen gyakran találkozhatunk; például csigafúrók, ferdefogú fogaskerekek, csigakerekek, csavarok.

Ebben a részben $D \subseteq \mathbb{R}^2$ egy (ívszerűen) összefüggő nyílt halmazt jelöl, azaz bármely két (belső) pont összeköthető görbével. Az $\bar{r}: D \to \mathbb{R}^3$ függvényeket a továbbiakban

$\bar{r}(u,v) = x(u,v) \cdot \bar{\imath} + y(u,v) \cdot \bar{\jmath} + z(u,v) \cdot k$

alakban fogjuk megadni, ahol az x, y, z koordinátafüggvények $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ típusú skalármezők.

Koordinátás alakban: $\bar{r}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big),\ (u,v) \in D$.

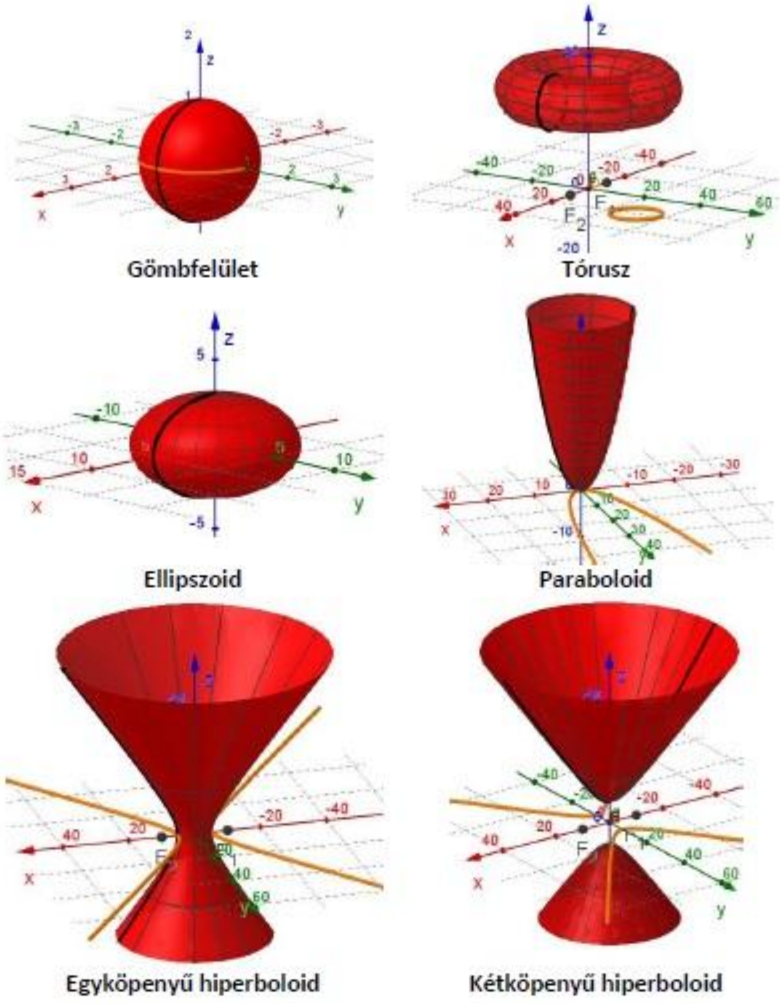
Egy Az $\bar{r}: D \to \mathbb{R}^3$ leképezést parametrizált felületnek nevezünk, ha folytonosan parciálisan differenciálható és $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \neq \bar{0}$ bármely $(u,v) \in D$ esetén.

A leképezés képhalmazát mondjuk ilyenkor röviden felületnek.

A hétköznapi értelemben vett "felületek" nem felületek általában a fenti értelemben, de bármely pontjuk elegendően kis környezete megadható a definícióban szereplő parametrizált felületként.

A "z" tengellyel párhuzamos egyenes megforgatásával forgáshengert, forgástengelyt metsző egyenes megforgatásával forgáskúpot, míg a forgástengellyel kitérő helyzetű egyenes megforgatásával egyköpenyű forgáshiperboloidot kapunk. Kör megforgatásával gömb vagy ún. tórusz adódik. Ellipszis, parabola és hiperbola tengelyei körüli megforgatásával forgásellipszoidot, forgásparaboloidot és egyköpenyű, illetve kétköpenyű forgáshiperboloidot kapunk.

DOI: 10.21791/IJEMS.2017.2.12.



5. Ábra: Másodrendű felületek .

Ezen felületek paraméterezése és például a GeoGebrával való szoftveres ábrázolása hasznos gyakorlófeladat. A lineáris algebrai tanulmányok feleleveníttődnek: szükség van a forgatás, mint lineáris transzformáció mátrixára, illetve a másodrendű görbéket – kör, ellipszis, hiperbola, parabola – meg kell tudni adni

$\bar{r}(v) = x(v) \cdot \bar{\imath} + 0 \cdot \bar{\jmath} + z(v) \cdot \bar{k}$ alakban.

A ''z'' forgástengelyű r sugarú hengerre írt csavarvonal:

$$\bar{r}(v) = r \cdot \cos v \cdot \bar{\imath} + r \cdot \sin v \cdot \bar{\jmath} + \lambda \cdot v \cdot \bar{k} \ \ (v \in \mathbb{R})$$

Ha egy görbe minden pontja azonos paraméterű csavarmozgást végez, akkor a görbe által meghatározott felületet csavarfelületnek nevezzük. Ha a $\bar{c}$ görbe előállítása az ''xz'' koordinátasíkban

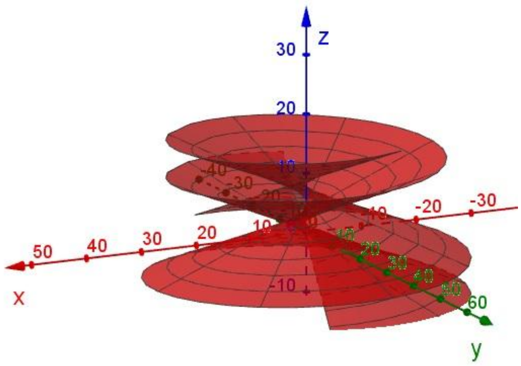
$$\bar{c}(u) = x(u) \cdot \bar{\imath} + 0 \cdot \bar{\jmath} + z(u) \cdot \bar{k} \ \ (u \in I)$$

akkor a csavarfelület

DOI: 10.21791/IJEMS.2017.2.12.

$\bar{r}(u,v) = x(u)\cdot\cos v\cdot\bar{\imath} + x(u)\cdot\sin v\cdot\bar{\jmath} + (z(u)+\lambda\cdot v)\cdot k \quad ((u,v)\in I\times\mathbb{R})$

Ha $\bar{c}(u) = (2+5u)\cdot\bar{\imath} + 0\cdot\bar{\jmath} + (3-2u)\cdot\bar{k}\ (u\in[-5,5])$ (egyenes szakasz), akkor a csavarfelület a 6. Ábrán látható.



6. Ábra: Egyenesvonalú csavarfelület.

2. Összegzés

A mérnöki munkában használt matematikai modellek megértésére való igény felkeltéséhez elengedhetetlenül fontos, hogy a matematika órákon a hallgatók találkozzanak egyszerűbb műszaki példákkal, alkalmazásokkal. Az, hogy mennyire oktassuk precízen a matematikát, milyen mértékű legyen az alkalmazásorientáltság és milyen módon tartsunk lépést az informatika fejlődésével, nyílván függ az aktuális hallgatói összetételtől és a rendelkezésre álló órakerettől.

[1] –ben bőséges GeoGebrával készített ábraanyag szolgálja a szemléletesség követelményét. Az elméleti tételek gyakran az ismertetés szintjén maradtak. A bizonyítások ismertetése mögött a legtöbb esetben didaktikai megfontolás áll. A bizonyítás során a témakör bevezetett fogalmai feleleveníťődnek, feltárulnak a köztük lévő logikai kapcsolatok, az állítás feltételeinek szerepe világossá válik és nem utolsósorban a hallgatók korábbi tanulmányainak egy-egy lényeges eleme is szerephez juthat. Ha a bizonyításra nem is kerül sor formális keretek között, a bőséggel szerepeltetett megjegyzések, illetve átkötő szövegek gyakran tartalmaznak utalást a bizonyítás alapgondolatára, illetve kapcsolatot teremtenek az egyes eredmények között - mintegy kompromisszumképpen. A matematikai szoftverek alkalmazási lehetőségeinek bemutatását [1] a MAPLE segítségével illusztrálja.

Hivatkozások

[1] Vinczéné Dr. Varga Adrienn, Többváltozós függvények differenciál- és integrálszámítása, Debreceni Egyetemi Kiadó, 2017. ISBN: 978 963 318 624 4