International Journal of Engineering and Management Sciences (IJEMS) Vol. 2. (2017). No. 2.
DOI: 10.21791/IJEMS.2017.2.10.

Általános iskolás tanulók és egyetemi hallgatók fogalomképzetei a függvényről
Concept images of primary school students and university students about function

GY. SZANYI

Debreceni Egyetem, Műszaki Kar, Műszaki Alaptárgyi Tanszék, szanyi.gyongyi@eng.unideb.hu

Absztrakt. A függvény fogalma alapvető fontosságú a matematikában. Minthogy a legtöbb matematikai fogalmat nem lehet egylépésben elsajátítani [13], így a függvény fogalmának kialakítása is hosszú folyamat. Ennek egyik célja a hatékony fogalomképzet kialakítása, mely nagy jelentőséggel bír a problémamegoldásban. A tanulók legtöbbször a fogalomképzetükre támaszkodva döntenek arról, hogy egy objektum példája vagy ellenpéldája az adott fogalomnak (Vinner & Dreyfus, 1989). Jelen tanulmányban felmérések keretén belül végzett vizsgálatokkal arra a kérdésre keressük a választ, hogy milyen fogalomképzettel rendelkeznek az általános iskolát fejező tanulók (8. osztály) és az egyetem első évét megkezdő mérnökhallgatók a függvényről.

Abstract. The concept of function is fundamental importance to the mathematics. Since the most mathematical concept is not acquired in one step [13], thus we have to take a long journey for developing of the function concept. One of the aim of this process to develop an effective concept image which have an important role in problem solution. The students decides on the basis of a concept image whether a given mathematical object is an example or nonexample of the concept. (Vinner & Dreyfus, 1989). In this paper we are looking for the answer of the following question: what are the concept image of the function concept formed of the students by the end of the primary school (8th grade) and the first year engineering university students?

Bevezetés

A legtöbb matematikai fogalom, így a függvény fogalma is, nagyon absztrakt. Ellentétben a primitív fogalmakkal (például a pont), melyek ún. osztenzív (rámutatásos) definícióval rendelkeznek (a pont definiálásánál mutatnunk egy pontot és azt mondjuk, hogy „ezt pontnak nevezzük")[3], a függvénynek van formális definíciója. A tanulók sok esetben azonban nem a fogalom egy definícióját használják fel annak eldöntésére, hogy egy matematikai objektum példája vagy ellenpéldája a fogalomnak. Legtöbbször a fogalomról kialakult képzetre alapozva hozzák meg a döntést. Ezen fogalomképzetek kialakulására hatással vannak a fogalom alakítása során szerzett tapasztalatok, vizuális reprezentációk, élmények, konkrét példák stb.. Ahhoz, hogy „kézben" tartsuk a fogalmat szükségünk van egy arról kialakult képzetre, nem csak a fogalom egy definíciójára [13]. Magyarországon a függvényfogalom definícióját általános iskola 7. osztályában adják meg először. Alsóbb osztályokban a

DOI: 10.21791/IJEMS.2017.2.10.

fogalom történeti fejlődését követve, alkotórészeinek (változók, kapcsolatok, szabályok) [8] és különböző reprezentációs módjainak (verbális, táblázat, nyíldiagram, képlet, grafikon) megismerését megcélozva készítik elő a fogalom bevezetését [11]. Minthogy a matematikában egyik tananyag a másikra épülő, így a függvényfogalom iskolai kialakítása során elengedhetetlen, hogy a tanulókban olyan fogalomképzet alakuljon ki a függvényről, melyre a későbbiekben ráépíthető az egyetemi tananyag is.

1. Elméleti háttér

1.1. A fogalom mentális képe, fogalomképzet és a fogalom definíciója

Mindazokat az asszociációkat, melyekre az egyén egy fogalom neve hallatán gondol Vinner a *fogalom mentális kép*ének nevezi (1983). A mentális kép magába foglalja a fogalom bármilyen vizuális reprezentációját (speciális függvény grafikonja; az „$y = f(x)$" formula mint kép stb.). E mögött meghúzódhat a fogalom tulajdonságainak egy halmaza is (például az egyén a függvény szó hallatán gondolhat arra is, hogy az mindig megadható képlettel).

A fogalomképzetről sok tanulmányban olvashatunk [12, 13]. A *fogalomképzet* (*concept image*) minden olyan mentális kép halmaza, melyekre az egyén elméjében asszociál a fogalom neve hallatán az őket jellemző tulajdonságokkal együtt [12, 13]. Tehát fogalomképzetnek nevezzük a fogalom nevéhez kapcsolt teljes kognitív struktúrát, mely tartalmazza a vizuális reprezentációkat (képek, diagramok, grafikonok), mentális képeket (belső kapcsolatok), konkrét tapasztalatokat, példákat, élményeket, tulajdonságokat, eljárásokat (például valaki a függvény szó hallatán gondolhat az $y = f(x)$ kifejezésre hozzákapcsolva azt, hogy minden függvény leírható képlettel). Ennélfogva a képek, konkrét példák, konkrét tapasztalatok tehát jelentős szerepet játszanak a hatékony fogalomképzet kialakításában [2].

Fogalom definíciója (*concept definition*) alatt Vinner (1983) egy verbális definíciót ért, amely pontosan magyarázza a fogalmat. A fogalom megértéséhez nem csak a fogalom definíciójára van szükség, hanem az arról kialakult fogalomképzetre is. Azt is kiemeli, hogy ha a fogalom csak magával a definícióval lett bevezetve, akkor inaktív marad, és lassan elfelejtődik. Gondolatban majdnem mindig a fogalomképzet idéződik fel. Tehát a fogalom kialakítási folyamatában szükséges a fogalommal kapcsolatos példák és ellenpéldák megléte.

A továbbiakban áttekintjük kutatásunk központi fogalmának, a függvénynek a történeti fejlődését, mely eszközként szolgálhat a matematikai gondolkodás fejlődésének megértéséhez, és épít a történeti és az egyéni fejlődésben megmutatkozó párhuzamokra [4].

1.2. A függvényfogalom történeti áttekintése

A 17. században az algebrában és geometriában bekövetkezett fejlődés nagy hatással volt a függvény jelenlegi definíciójának megszületésére. Kleiner (1989) a függvényfogalom fejlődésének figyelemmel követése során három mentális képet használ a fogalom egymást követő változásának leírásához:

DOI: 10.21791/IJEMS.2017.2.10.

- geometriai (görbe formájában jelenik meg)
- algebrai (képlet formájában jelenik meg)
- logikai (egy „input-output gép" mentális képeként jelenik meg).

Az algebrai és a geometriai kép összeolvadásában a kulcsszerepet játszott a *változók* és az azok közötti kapcsolat kifejezésére szolgáló *formulák* bevezetése.

Végül is Descartes nagy matematikai tette volt a függvény első definíciója. Ő a függvényt megfeleltetésnek definiálta, bár ő még csak az algebrai műveletekkel meghatározott függvényekkel foglalkozott. Descartes, és vele egy időben és ugyanolyan érdemekkel, Fermat megteremtette a változó mennyiségek matematikáját [7].

A függvényfogalom további alakítása Leibniz nevéhez kötődik. Ő 1692-ben bevezette a „függvény" (latin „functio" – végrehajtás, eljárás) szót, görbékhez kacsolódó mértani objektumok jelölésére (például a görbe meredeksége). Ekkor vezette be a paraméter, az állandó, a változó és más kifejezéseket [7]. A 18. században először Bernoulli és Euler munkájában jelenik meg explicit módon és kap központi szerepet a függvény fogalma. A függvényt mint analitikus kifejezést definiálják, mely változók és állandók közötti kapcsolatot leíró képlet [5]. Ez a definíció tehát megkövetelte a függvény képlettel történő előállíthatóságát, ami később a Fourier-sorok felfedezésével már szűknek bizonyult.

Fourier munkássága egy másik fontos állomás volt a függvénydefiníció változásában. 1822-ben publikált munkája a függvény analitikus (algebrai) kifejezését legalább egyenrangúvá emelte annak geometriai reprezentációjával (görbe).

Dirichlet 1837-ben megadta a függvény egy újabb definícióját: *„Ha az y változó úgy kapcsolódott az x változóhoz, hogy x valamely számértékéhez bármilyen törvény hozzárendeli y-nak egy értékét, akkor az y a független x változó függvényének nevezzük."* [7, 8]. A Dirichlet-féle általános függvénydefinícióhoz eljutott Bolyai Farkas is, aki az 1832-ben megjelent Tentamenben két értelemben is megadta a függvény definícióját: (1) „…akármely változó (avvagy változók) akármely állandóval (avvagy állandókkal) akármely (akár az idben, akár az űrben tett) munkálattal (avvagy munkálatokkal) köttessenek öszve…mondhatthatik függvénynek"; (2) „…a függvény bármilyen operáció, amely az időben és térben elképzelhető."[9].

Bourbaki 1939-ben megfogalmazott függvénydefiníciója már kiterjedt a halmazokra is:

> *„Legyenek E és F két különböző vagy nem különböző halmazok. Az E halmaz egy változó eleme és az F halmaz egy változó eleme közötti relációt funkcionális relációnak hívjuk, ha minden $x \in E$ elemhez létezik egyetlen $y \in F$, mely relációban áll az x elemmel. Az így megadott operációt függvénynek nevezzük…. az y a függvény értéke adott x elem mellett és a függvény meghatározott az adott funkcionális relációval. Az ekvivalens funkcionális reláció ugyanazt a függvényt határozza meg."* [5]

A modern függvény definíciót Vinner és Dreyfus (1989) tanulmányukban Dirichlet-Bourbaki definíciónak hívja, mely domináns jelleggel bír a matematikában a függvényfogalom tanításánál:

> *„A függvény két halmaz közötti olyan megfeleltetés, mely az egyik halmaz minden eleméhez pontosan egy elemet rendel a másik halmazból."* (357. old.)

DOI: 10.21791/IJEMS.2017.2.10.

A felsőoktatásban a függvény azon definícióját használják, mely azt speciális relációként írja le: *„Legyenek A és B halmazok. Egy $f \subset A \times B$ relációt függvénynek nevezünk, ha $a \in D_f$, afb* és *afb^* mindig maga után vonja, hogy $b^* = b$.”* [6]

A függvényfogalom történeti fejlődéséből megállapíthatjuk, hogy a változó mennyiségek közötti kapcsolatok jellege egyre általánosabbá vált és a definíciók eltekintettek a kapcsolatok kizárólag formulával történő leírásától. A függvény mind a matematika, mind a matematika oktatás egyik központi fogalma jelenleg is. Az iskolai gyakorlatban általában követjük a történeti fejlődést és a fogalom előkészítéséhez, alakításához a „szűkebb értelemben vett függvényt” használjuk, azaz a szabályokkal megadható függvények kerülnek tárgyalásra. Ennek oka az egyszerűbb, könnyebb kezelhetőség mellett az is, hogy a matematikában megismert függvényekkel közelítjük meg a világ kevésbé szabályos történéseit, tehát ezek ismeretével kielégítően leírhatók a tapasztalt jelenségek.

Az alábbiakban bemutatandó felmérések tapasztalatai rávilágítást adnak arra vonatkozóan, a függvény iskolai kialakítási folyamata milyen fogalomképzetet eredményez a 8. osztályt végző tanulók és egyetem első évét megkezdő hallgatók egy-egy csoportjánál.

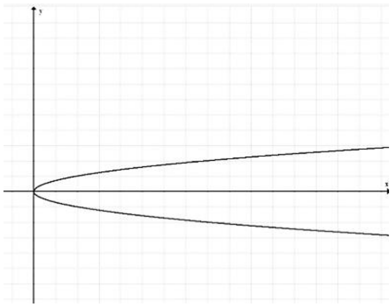
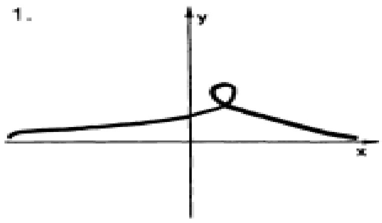
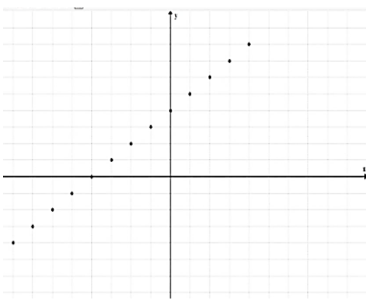
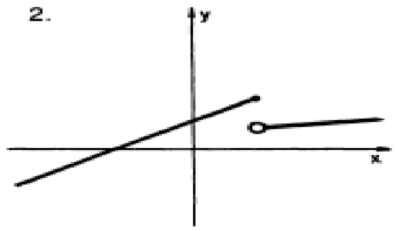
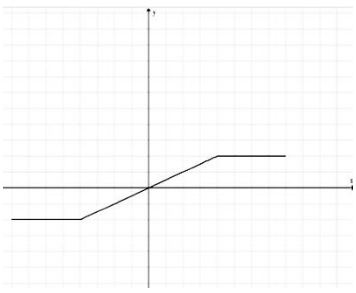
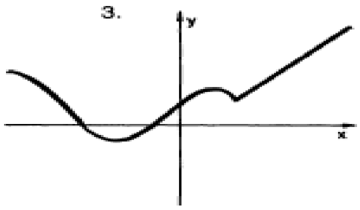
2. A kutatás módszertana

2.1. A kutatás résztvevői és körülményei

Vizsgálatunkban 34 elsőéves villamosmérnök hallgató vett részt, valamint 19, az általános iskola 8. osztályát befejező tanuló. A felmérésre 8. osztályban 2016 júniusának elején, a függvények témakör számonkérését követő napon, az egyetemi hallgatóknál pedig 2014 októberében, a függvények Matematika 1 c. tárgy előadásán történő tárgyalását megelőzően került sor [10]. A mindkét csoportban elvégzett felmérések feladatlapjainak csak azon kérdéseit mutatjuk be, melyek típusát tekintve hasonlók voltak és a korosztálynak megfelelő ismereteket tartalmaztak. Az egyetemi hallgatók feladatlapján szereplő kérdések Vinner és Dreyfus (1989) tanulmányából valók.

DOI: 10.21791/IJEMS.2017.2.10.

2.2. A felmérésben szereplő kérdések

Általános iskola 8. osztály	**Egyetem első év**
Az ábrákon látható grafikonok közül melyik ábrázol függvényt? Válaszodat indokold!	*Létezik-e olyan függvény, melynek grafikonja:*
1.  Függvény, mert… Nem függvény, mert…	
2.  Függvény, mert… Nem függvény, mert…	
3.  Függvény, mert… Nem függvény, mert…	

1. Táblázat: A felmérés kérdései általános iskola 8. osztályában és egyetem első évében.

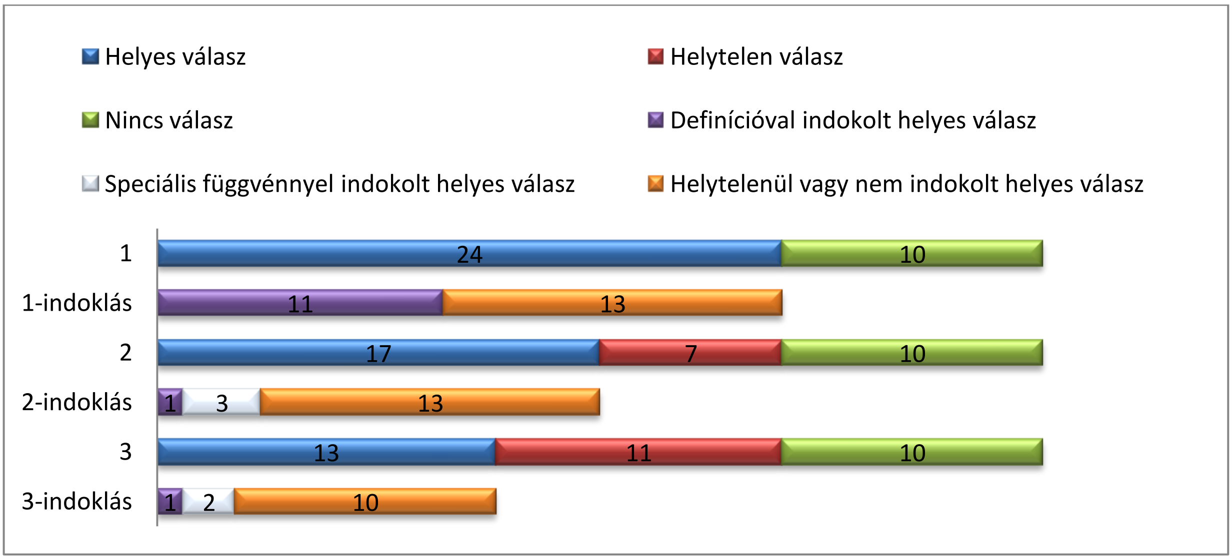
2.3. A felmérés tapasztalatainak bemutatása

Egyetemi hallgatók válaszainak elemzése

Az 1. kérdésre érkezett a legtöbb helyes válasz helyes indokkal (11). Ebben az esetben 10 hallgató a függvény definícióját felhasználva indokolta döntését (a 34 hallgatót H1,..., H34 módon jelöltük). A H3-as hallgató válasza például: „*Nem, mert egy értékhez két másikat rendel*". Azon hallgatók, akik helyes választ adtak ugyan, de az indokuk helytelen kategóriába sorolódott, a következőképpen érveltek válaszuk mellett: „*Szerintem nem, mert én még ilyet nem láttam*" (H30),

„Nem, mert egy függvény nem tud tenni ilyen nagy ellentétes monotonitást" (H32). A számadatok igazolják (1. ábra), hogy a válaszadó hallgató közül senki sem adott erre a kérdésre helytelen választ.

A 2. kérdés esetében a 4 helyes választ helyes indokkal adó hallgató magyarázatából a folytonosság vizsgálata tűnik ki: *„Függvény, szakadása van"* (H3). Az ilyen típusú válaszokat a „Speciális függvénytípussal indokolt helyes válasz" kategóriába soroltuk. A helyes választ helytelen indokkal adó hallgatók a következőkkel érveltek: *„Igen, az y=kx+b egyenes egyenlete"* (H33), *„Igen, mert ilyet már láttam"* (H30). Azaz valamilyen ismert függvény grafikonjához hasonlították az adott grafikont. A helytelen válaszok arra engednek következtetni, hogy valószínűleg a szakadási pont megléte okozhatott zavart a *Nem*-mel válaszoló hallgatókban: *„Nem, mert egy függvény egy értéket vagy felvesz, vagy nem, nem lehet, hogy fel is veszi meg nem is"* (H27), *„Ilyen szakadás nem lehet egy függvényben"* (H24).



1. ábra: A kérdésekre adott hallgatói válaszok száma

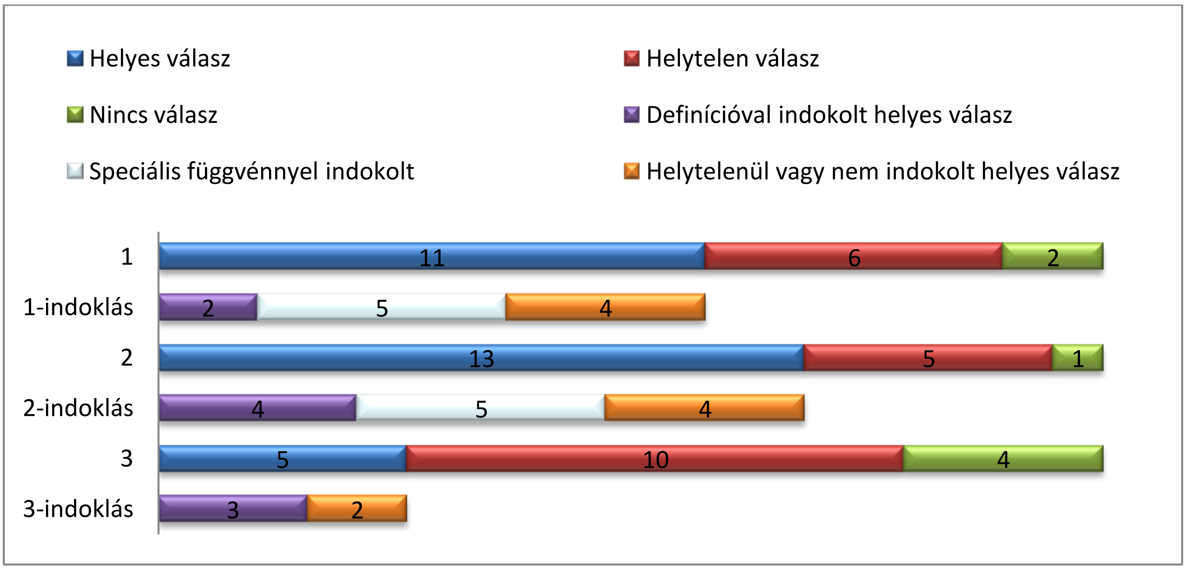
A 3. kérdésre érkezett a legkevesebb helyes indokkal adott helyes válasz. Ezen kategóriába sorolható 3 hallgató közül 2 magyarázata arra enged következtetni, hogy ők vizsgálták az alaphalmazt és annak különböző részhalmazain értelmezett, általuk ismert függvény grafikonjához próbálták hasonlítani az adottat: *„x_0-ig egy polinomfüggvény, utána lineáris függvény"* (H9). 1 hallgató pedig a definícióra támaszkodva hozott döntést és adott helyes választ a kérdésre. Az alaphalmaz különböző részhalmazaihoz tartozó hozzárendelési szabályok szerint megrajzolt függvénygrafikon okozhatott problémát azon hallgatóknál, akik úgy gondolták, hogy a megadott grafikon nem reprezentálhat függvényt: *„nem létezik, mivel nincs olyan egyenlet, melynek grafikonon lerajzolt képlete előbb görbül, aztán lineárissá változik"* (H5). A H30-as hallgató ennél a kérdésnél is azon csoportba sorolható (helytelen indok), akinek érvelése a már látott függvénygrafikonokra összpontosult (*„Igen, mert ilyet már láttam"*).

Vinner és Dreyfus kutatásának résztvevői (1989) hasonló válaszokat reprezentáltak. A 2. kérdés esetében például szintén a szakadási pont megléte miatt nem tekintették függvénygrafikonnak az adottat, vagy úgy vélték, hogy *„Egy függvénynek nem lehet két hozzárendelési szabálya. Nem változtathatja meg a jellegét*" (363. old.).

8. osztályos tanulók válaszainak elemzése

A kérdések szintén a tanulók függvény fogalmáról kialakult képzetének vizsgálatára irányultak. A feladat megoldottsági mutatóit a vizsgált tanulói csoportokban a 2. ábra szemlélteti. A „Helytelenül vagy nem indokolt helyes válasz" kategóriába olyan válaszok kerültek, amelyekben csak „függvénycsírákat" véltünk felfedezni (például: .*„nem függvény, mert ilyen kép nincs a koordináta-rendszerben*"-HU23).

Amint azt az ábra is mutatja (2. ábra), a tanulók annak érdekében, hogy eldöntsék az adott grafikon egy függvény grafikonja-e, ritkán használták a függvény definícióját. A tanulók többsége egy speciális függvénytípus segítségével hozott döntést (helyest vagy helytelent): valamely ismert, nevezetes függvény grafikonjához hasonlította az adottat. Ha az eltért a már ismerttől, akkor az adott görbét nem tekintették egy függvény grafikonjának.



2.ábra: A kérdésekre adott tanulói válaszok száma

Az 1. kérdésnél a parabola képére támaszkodva döntöttek arról, hogy az adott grafikon reprezentálhat-e függvényt: *„Nem függvény, mert a parabola nem így helyezkedik el, hanem álló helyzetben*"(HU3), *„Függvény, mert ez egy parabola…"* (HU19).

A 2. kérdésre érkező válaszokból is a lineáris függvény képéhez való hasonlítgatás mutatkozott meg. A „speciális függvénnyel indokolt helyes válaszok" szerint *„Függvény, mert lineáris függvény*" (HU26). A helytelenül válaszolók a döntéshozatalnál arra fektették a hangsúlyt, hogy a pontok össze vannak-e kötve avagy sem: *„Nem függvény, mert a pontok nincsenek összekötve"* (HU27, HU1).

A 3. kérdésre érkezett a legtöbb helytelen válasz. Mivel itt az alaphalmaz részhalmazain különböző hozzárendelési szabályok definiálták a függvényt, s ez eltért a tanórán megismert, általában egy hozzárendelési szabállyal definiált függvényektől, így elvetették annak létezését: *„Nem függvény, mert egy függvény képe csak egyenes, parabola, hiperbola vagy V alakú lehet"*(HU28), *„Nem függvény, mert*

DOI: 10.21791/IJEMS.2017.2.10.

nem lehet hozzá felírni függvényképletet" (HU4). Hasonlóan magas számban adtak nemleges választ az egyetemi hallgatók is a náluk kitűzött, típusában ugyanazon 3. kérdésre. Az indoklásból is hasonló okokra következtethetünk. A válaszokból alapján a legtöbb tanuló a függvényt leginkább egy, a tanórán megismert és vizsgált függvénnyel azonosítja.

3. Összegzés

Jelen tanulmány azt vizsgálta, hogy milyen fogalomképzettel rendelkeznek a 8. osztályt fejező tanulók és az egyetemi képzésbe bekerülő villamosmérnök hallgatók a függvényről. Az eredmények arra engednek következtetni, hogy a vizsgált hallgatók és tanulók többsége abban az esetben tekintett egy görbét valamely függvény grafikonjának, ha hasonlóságot vélt felfedezni az általa jól ismert függvénygrafikonokkal.

A fogalom történeti fejlődése tekintetében az érettségizett hallgatók képzetében, csakúgy, mint Vinner és Dreyfus tanulmányában vizsgált izraeli hallgatók többségének képzetében, egy "szűk" függvényfogalom él, azaz az analitikus kifejezéssel (formulával) megadható hozzárendeléseket tekintik függvénynek; a függvényfogalom tartalmi jelentése sok esetben elveszett. A fogalomkialakítási folyamat, a vizsgát hallgatók esetében, valamely szakaszban "megtört". Annak ellenére, hogy a magyarországi matematika kerettanterv, illetve használatos tankönyvek már 7. osztályban megismertetik a tanulókat a „tágabb értelemben vett" függvénydefinícióval (például a Dirichlet-Bourbaki definícióval), a vizsgált hallgatók fogalomképzetei egy „szűk" függvényfogalmat mutatnak.

Hasonló fogalomképzetek a felmérésben résztvevő 8. osztályos tanulóknál mutatkoztak: a függvény definíciójának megadása után, a különböző speciális függvények bevezetésének hatására fogalomképzetük egy „szűk" függvényfogalomnak felel meg.

Tehát a két korosztályban elvégzett felmérések alapján elmondható, hogy a vizsgált hallgatók többségének fogalomképzetei a 8. osztályos tanulók fogalomképzeteivel mutatnak hasonlóságot.

Minthogy a hatékony fogalomképzet kialakulására hatással vannak a fogalom alakítása során szerzett tapasztalatok, vizuális reprezentációk, élmények, konkrét példák és ellenpéldák, ezért az eredmények alapján indokoltnak találjuk a függvényfogalom általános és középiskolai kialakítási folyamatának felülvizsgálatát.

Hivatkozások

[1] Ambrus, A., *Bevezetés a matematikadidaktikába*. Eötvös Kiadó, javított kiadás, 2004.

[2] Ambrus, A., *A konkrét és vizuális reprezentációk használatának szükségessége az iskolai matematikaoktatásban*. http://rmpsz.ro/uploaded/tiny/files/magiszter/2003/osz/9.pdf

[3] Blaskó, Á., Hamp, G., *Írás 1.0. Az ötlettől a jól struktúrát szövegig*. Typotex kiadó, 2007.

[4] Herendiné Kónya, E., *Kisiskolások térbeli tájékozódó képességének fejlesztési lehetőségei*. PhD értekezés, Debreceni Egyetem, 2007.

[5] Kleiner I., Evolution of the function concept: A brief survey. *The College Mathematics Journal*, Vol. 20, No. 4, 282-300, 1989.

[6] Páles, Zs., *Bevezetés az analízisbe* (előadáskövető egyetemi jegyzet). Debreceni Egyetem, Matematikai Intézet, 2013. http://math.unideb.hu/media/pales-zsolt//anal.pdf

[7] Sain, M., *Nincs királyi út*. Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1986.

[8] Sierpinska, A., On understanding the notion of function. In Harel, G., Dubinsky, E. (eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. DC: Mathematical Association of America, Washington, 25-58, 1992.

[9] Szénássy, B., *Bolyai Farkas.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1975.

[10] Szanyi, Gy., Fogalomképzetek és definíciók a függvényről. In Imre Kocsis (ed.), *Proceedings of the Conference on Problem-based Learning in Engineering Education* (pp. 36-41). Debrecen, 2015.

[11] Szanyi, Gy., The investigation of students' skills in the process of function concept creation*. Teaching of Mathematics and Computer Science Vol.* 13(2), 249–266., 2015.

[12] Vinner, S., & Hershkowitz, R., Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. In R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 177-184). Berkeley: University of California, Lawrence Hall of Science, 1980.

[13] Vinner, S., Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14, 293-305., 1983.