

Dinamikai rendszer mozgásegyenletének felírása duális megközelítéssel

Determination of the Differential Equations of a Dynamical System using Dual Description

RÓNAI LÁSZLÓ¹

¹Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki és Informatikai Kar, Szerszámgépészeti és Mechatronikai Intézet.
Magyarország. laszlo.ronai@uni-miskolc.hu

Absztrakt. A cikk egy mechanikai rendszer matematikai modelljének felírását kívánja bemutatni energia alapú szemléletmód alkalmazásával. A modell mind általánosított elmozdulás-, mind általánosított impulzusok segítségével megalkotásra kerül. Az utóbbi felírás mód a gyakorlatban kevésbé elterjedt, köszönhetően annak komplikáltabb tárgyalásmódja miatt. Egy példafeladaton keresztül a két módszer bemutatása megtörténik, továbbá egy PID blokk segítségével egy szabályozási feladat is megoldásra kerül.

Abstract. The paper deals with the description of a mathematical model of a mechanical system using the so-called energy-based approach. The model is created using both generalized displacements and generalized momenta. The latter prescription method is less common in practice, due to its complexity. The two ways are presented through the same example mechanical problem, and a control task is also solved with the help of a PID block.

Kulcsszavak: Lagrange függvény, általánosított impulzus, PID szabályozás

Keywords: Lagrangian, Generalized Momentum, PID Control

Bevezetés

A mérnöki életben a szimulációk elvégzése igen nagy fontossággal bír, ez több ipari ágazatban is nélkülözhetetlen pl. járműipar, építőipar, gépipar, nehézipar stb. Szimuláció esetén a kísérletek lefolytatása nem a valós rendszeren, hanem egy elméleti modellen történik. Ez több előnyt is magában hordoz, hiszen az adott rendszer működése-, a vizsgált jelenség jobban megérthető [1], a reprodukálhatóság garantálható, továbbá költséghatékonyabbnak is mondható, szemben a valós rendszeren történő mérések elvégzésével, elemzésével. Természetesen a szimulációk lefolytatása nem helyettesíti a valós rendszeren történő méréseket, mivel a megalkotott modell verifikálása szükséges.

A mechanikai-, elektronikai-, elektromechanikai rendszerek differenciálegyenleteinek felírására jól használható az ún. energia alapú megközelítés, melyhez kapcsolódóan a Wellstead által írt könyv [2] részletesen tárgyalja a variációs módszereket. Egy mechanikai rendszer esetében definiálható az ún. potenciális energia, kiegészítő potenciális energia, kiegészítő kinetikai energia, kinetikai energia. A

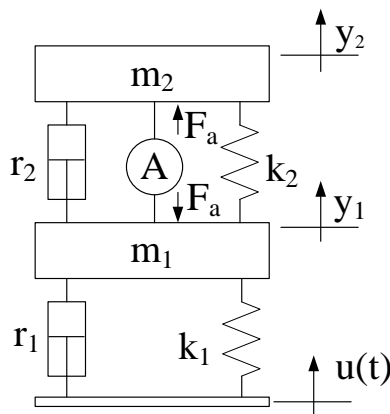
kiegészítő energiák a Legendre transzformációval [3] képezhetők, hiszen alkalmazásával egyik független változóról könnyedén át lehet térni a másikra.

Jelen cikkben egy mechanikai rendszer matematikai modellje kerül felírásra energia alapú módszer segítségével. A modell előállítása kétféleképpen is megvalósul, az első esetben a gyakran használt primális megközelítést alkalmazva történik, míg a második verzióban általánosított impulzusokkal valósul meg a differenciálegyenletek felírása. Ez utóbbi technika kevésbé ismert, a cikk ennek alkalmazását kívánja bemutatni egy két szabadsági fokkal rendelkező mechanikai modell példáján keresztül. Az általánosított impulzusokkal történő felírás mód előnye lehet, hogy a rendszerkimeneten közvetlenül az erők kaphatók meg, így hogyha a valós rendszeren erőmérő cellák szolgáltatják a mérési adatokat, akkor egyből összevethetők az eredmények.

A cikk a következők szerint strukturált: Az 1. fejezet a matematikai modell felírását ismerteti. A Lagrange- és a kiegészítő Lagrange függvények-, illetve a nem konzervatív tagok virtuális munkájának felírása után a másodfajú Lagrange egyenlet használatával a rendszeregyenletek megadhatók. A szabályozástechnikában elterjedt állapotér-reprezentáció [1], [4] alkalmazásával a primális- és duális modellek megalkotása után PID blokk beépítésével egy szabályozási feladat megoldása történik a 2. fejezetben. Az összefoglalás tartalmazza az elért eredményeket.

1. Dinamikai rendszer modellje

Mechanikai-, villamos- vagy elektromechanikai rendszerek matematikai modelljének előállítására a bővített Hamilton elvet alkalmazó energia alapú módszer használata célravezető.



1. ábra: Egy két szabadságfokú mechanikai rendszer modellje

Az 1. ábrán látható egy 2 szabadsági fokkal rendelkező mechanikai rendszer modellje, amely pl. egy negyedautó [5] aktív felfüggesztését- vagy akár egy kamerafelfogatási megoldást is reprezentálhat. A bemutatni kívánt két szabadsági fokkal rendelkező modell bővíthető több szabadságfokú modellre egy negyedautó felfüggesztése vonatkozásában, akár az utas- és a rugózott tömeg külön történő kezelésével. A modell természetesen elhanyagolásoktól nem mentes, mivel pl. a járműtest RPY (Roll, Pitch, Yaw) elfordulási szögeit elhanyagolja. A felfüggesztés lineáris rugókarakterisztikája helyett a valóságban progresszív alakot mutat, így a fent tárgyalt modellt már nemlineárisként szükséges kezelni. A cikkben szereplő modell járművek vonatkozásában csupán első rendben közelít. A valóságban a rendszerparaméterek bizonytalanságokat tartalmaznak a felfüggesztés elemeinek aktuális állapota

függvényében, pl. a rugók fáradása, a csillapító dugattyúk kopása. A bizonytalanságok modellre gyakorolt hatásaira jó módszer lehet a paraméterérzékenység vizsgálat.

A rendszer primális esetre vonatkozó összefüggései a következők:

$$\mathcal{L}(y, \dot{y}) = E_{kin}^* - U_p = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 (y_1 - u(t))^2 - \frac{1}{2} k_2 (y_2 - y_1)^2, \quad (1)$$

$$\overline{\delta W}_{nc} = -r_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) (\delta y_2 - \delta y_1) - r_1 (\dot{y}_1 - \dot{u}(t)) \delta y_1 - F_a \delta y_1 + F_a \delta y_2, \quad (2)$$

ahol $\mathcal{L}(y, \dot{y})$ a Lagrange függvény, míg $\overline{\delta W}_{nc}$ a nem konzervatív tagok virtuális munkája, valamint az F_a erő egy aktív elem pl. egy hidraulikus munkahenger erő kifejtését reprezentálja. A rendszerben található 2-2 rugó és csillapító tag. Egy jármű vonatkozásában a rugózatlan tömeget m_1 , a rugózott tömeget m_2 jelöli. A k_1 a gumibroncs merevségi tényezőjét, az r_1 pedig a csillapítási tényezőjét reprezentálja. A k_2 és r_2 paraméterek rendre a felfüggesztés rugómerevségét-, csillapítási tényezőjét jellemzi. A rendszer talppontja környezeti hatásoknak, gerjesztéseknek kitett.

Az y_1 és y_2 általánosított elmozdulás-koordinátákra felírva a másodfajú Lagrange egyenleteket, adódnak a közönséges másodrendű differenciálegyenletek:

$$m_1 \ddot{y}_1 + (r_1 + r_2) \dot{y}_1 + (k_1 + k_2) y_1 = r_2 \dot{y}_2 + k_2 y_2 + r_1 \dot{u}(t) + k_1 u(t) - F_a, \quad (3)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + r_2 \dot{y}_2 + k_2 y_2 = r_2 \dot{y}_1 + k_2 y_1 + F_a. \quad (4)$$

Duális megközelítés esetén az ún. kiegészítő Lagrange függvényt \mathcal{L}^* [2] szükséges felírni, mely az impulzusok és azok idő szerinti első deriváltja függvényében, a kiegészítő potenciális energia U_p^* és az E_{kin} kinetikus energiák előjelhelyes összegének képzése segítségével alkotható meg. Ez a formalizmus kevésbé elterjedt alkalmazási mód a gyakorlatban. A Legendre transzformáció [3] segítségével a függvény tagjai képezhetők:

$$\mathcal{L}^*(p, \dot{p}) = U_p^* - E_{kin} = \frac{1}{2} \frac{\dot{p}_{k1}^2}{k_1} + \frac{1}{2} \frac{\dot{p}_{k2}^2}{k_2} - \frac{1}{2} \frac{p_{m1}^2}{m_1} - \frac{1}{2} \frac{p_{m2}^2}{m_2}, \quad (5)$$

ahol \dot{p}_{k1} , \dot{p}_{k2} rendre az első és második rugók erejét szolgáltatja, míg a tömegek impulzusait a p_{m1} , p_{m2} mennyiségek adják. Newton II. axiómája alapján a két tömeg impulzusának idő szerinti első deriváltja felírható, majd integrálás után megkapható a kiegészítő Lagrange függvény végleges alakja:

$$\mathcal{L}^* = \frac{\dot{p}_{k1}^2}{2k_1} + \frac{\dot{p}_{k2}^2}{2k_2} - \frac{1}{2m_1} \left(r_1 u(t) + k_1 \int u(t) dt - p_{r1} - p_{k1} + p_{r2} + p_{k2} - \int F_a dt \right)^2 - \frac{1}{2m_2} \left(-p_{r2} - p_{k2} + \int F_a dt \right)^2. \quad (6)$$

A nem konzervatív elemek virtuális munkája felírható:

$$\overline{\delta W}_{nc} = -\frac{\dot{p}_{r1}}{r_1} \delta p_{r1} - -\frac{\dot{p}_{r2}}{r_2} \delta p_{r2}. \quad (7)$$

A sebességek egyenlőségének figyelembevételével előállítható a rendszert leíró, minimális számú differenciálegyenlet: $\dot{p}_{r1} = \frac{r_1}{k_1} \ddot{p}_{k1}$, $\dot{p}_{r2} = \frac{r_2}{k_2} \ddot{p}_{k2}$. A p_{k1} és a p_{k2} általánosított impulzusokra történik meg a másodfajú Lagrange egyenlet felírása, amelyek eredménye a rendszert leíró két differenciálegyenlet, amelyek tulajdonképpen a kompatibilitási egyenletek:

$$\frac{\dot{p}_{k1}}{k_1} - \frac{(r_1 u(t) + k_1 \int u(t) dt - p_{r1} - p_{k1} + p_{r2} + p_{k2} - \int F_a dt)}{m_1} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\dot{p}_{k2}}{k_2} + \frac{(r_1 u(t) + k_1 \int u(t) dt - p_{r1} - p_{k1} + p_{r2} + p_{k2} - \int F_a dt)}{m_1} + \frac{(p_{r2} + p_{k2} + \int F_a dt)}{m_2} = 0. \quad (9)$$

A korábban említett sebességek egyenlőségéből következik, hogy $p_{r1} = \frac{r_1}{k_1} \dot{p}_{k1}$, $p_{r2} = \frac{r_2}{k_2} \dot{p}_{k2}$. A gyakorlatban a szimulációk elvégzéséhez célszerű az ún. állapotváltozós alakot használni, melynél elő kell állítani az állapotmátrixot, az input és output mátrixot. A másodrendű differenciálegyenletek fokszámának csökkentése érdekében új változók bevezetése szükséges, melyek a következők: $p_{k1} = x_1$, $p_{k2} = x_2$, $\dot{p}_{k1} = x_3$, $\dot{p}_{k2} = x_4$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & -\frac{r_1}{m_1} & \frac{k_1 r_2}{k_2 m_1} \\ \frac{k_2}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1} - \frac{k_2}{m_2} & \frac{k_2 r_1}{k_1 m_1} & -\frac{r_2}{m_1} - \frac{r_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_1 r_1}{m_1} & \frac{k_1^2}{m_1} & -\frac{k_1}{m_1} \\ -\frac{r_1 k_2}{m_1} & -\frac{k_1 k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_2} + \frac{k_2}{m_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ \int u(t) dt \\ \int F_a dt \end{bmatrix}. \quad (10)$$

A kimeneti vektorban az impulzusok deriváltjai, azaz az erők szerepelnek:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ \int u(t) dt \\ \int F_a dt \end{bmatrix}. \quad (11)$$

2. Szimulációs példaprogram kiegészítve PID szabályozóval

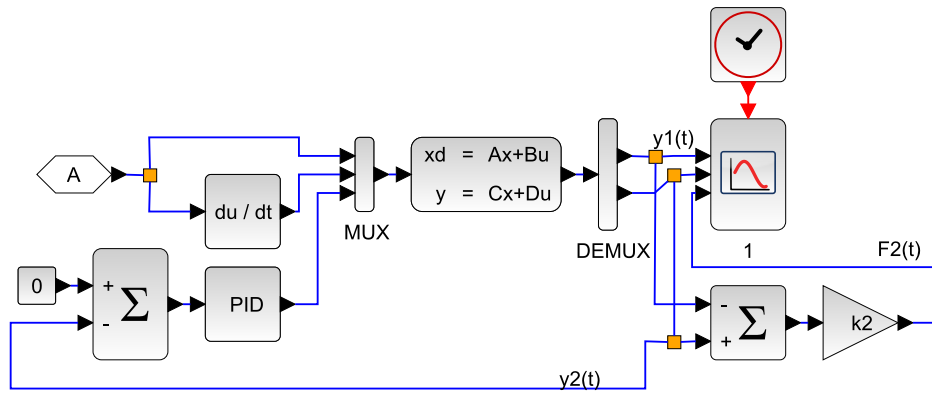
Az 1. fejezetben tárgyalt elsődleges és másodlagos változókkal felírt modellek verifikálása érdekében Scilab XCOS szoftverkörnyezetben szimulációk futtatása valósul meg. Az $u(t)$ által szolgáltatott nem kívánatos rezgések csökkentése érdekében az aktív elem, mint aktuátor fog beavatkozni. A szabályozás egy PID blokk segítségével történik, az aktuátor beavatkozáshoz szükséges ereje a következő összefüggés alapján fog összeállni:

$$F_a(t) = k_p y_2(t) + k_i \int y_2(t) dt + k_d \frac{dy_2(t)}{dt}, \quad (12)$$

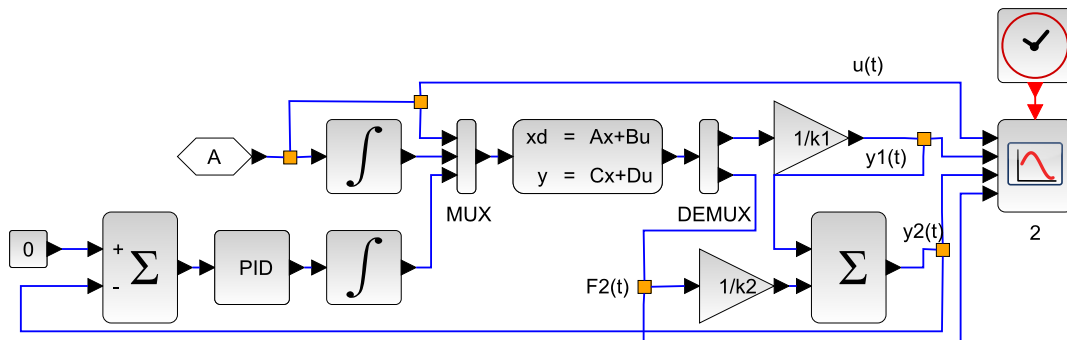
ahol az erősítési tényezőket k_p , k_i és k_d jelölik, valamint $y_2(t)$ a 2 jelű tömeg elmozdulása az idő függvényében.

A 2. és 3. ábrákon láthatók az elmozdulás-, valamint az impulzus koordinátákkal megadott rendszer állapotváltozós alakjai. Az utóbbi esetében y_1 és y_2 elmozdulások megkaphatók, ha az impulzus deriváltakból kifejezzük azokat: $y_1 = \dot{p}_{k1}/k_1$, $y_2 = \dot{p}_{k2}/k_2 + y_1$. Az „A” jelű input szolgáltatja az $u(t)$ függvényt.

A csatolt, közönséges differenciálegyenlet-rendszer megoldása Sundials/CVODE -BDF (Backward-Differentiation-Formula) megoldóval történik, amely egy általános kezdetiértékfeladat megoldónak számít [6].



2. ábra: Az állapotváltozós alak általánosított elmozdulás koordináták alapján



3. ábra: Az állapotváltozós alak duális megközelítéssel

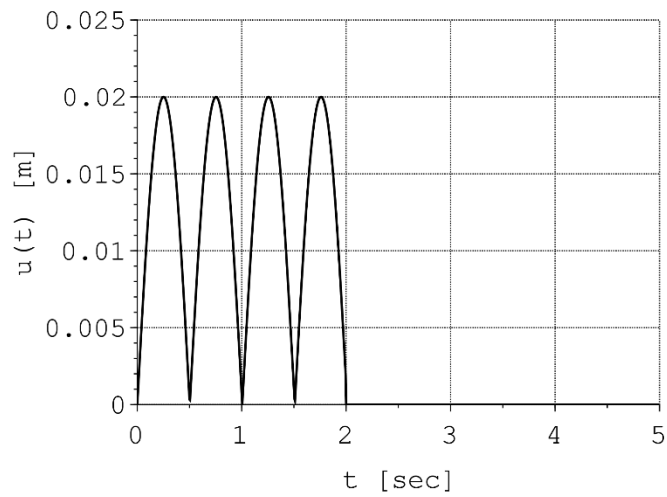
Az input függvényt (lásd: 4. ábra) periodikusnak tekintve, az alábbi alakban vesszük fel:

$$u(t) = \begin{cases} A|\sin \omega t|, & \text{ha } 0s \leq t < 2s, \\ 0, & \text{ha } t \geq 2s, \end{cases} \quad (13)$$

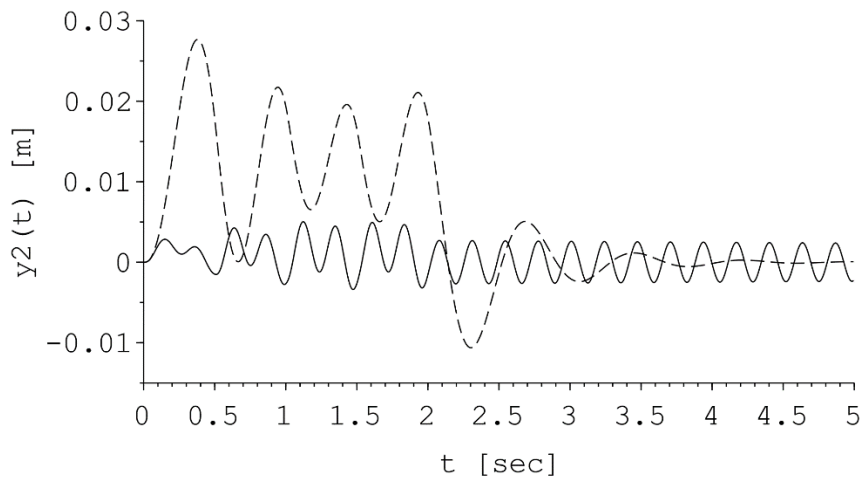
ahol az amplitúdó $A = 0,02 \text{ m}$, a körfrekvencia $\omega = 6,25 \text{ rad/sec}$. A rendszerparaméterek az [5] alapján kerültek megválasztásra: $k_1 = 2,2 \cdot 10^5 \text{ N/m}$, $k_2 = 25 \cdot 10^3 \text{ N/m}$, $r_1 = 1,8 \cdot 10^3 \text{ Ns/m}$, $r_2 = 1,5 \cdot 10^3 \text{ Ns/m}$, $m_1 = 320 \text{ kg}$, $m_2 = 42 \text{ kg}$. A szimuláció homogén kezdeti feltétel előírásával valósul meg.

Ziegler-Nichols módszer [7] alkalmazásával történik a PID szabályozó hangolása. Első lépésben a rendszert a stabilitás határára szükséges vinni (lásd: 5. ábra), melynek eredménye jelen esetben az y_2 elmozdulás oszcilláló jellege az alapjel körül az idő függvényében. A szaggatott vonalakkal reprezentált görbe a szabályozás nélküli esetet-, míg a folytonos vonalakkal megrajzolt görbe a stabilitás határáig elvitt rendszert mutatja. A meghatározott kritikus erősítés értéke $K_{krit} = 250000$, az ehhez tartozó kritikus periódusidő pedig $T_{krit} = 0,23 \text{ sec}$. Ezek alapján a PID szabályozó elméleti paraméterei, klasszikus PID esetre: $k_p = 150000$, $k_i \cong 1305000$, $k_d \cong 4313$.

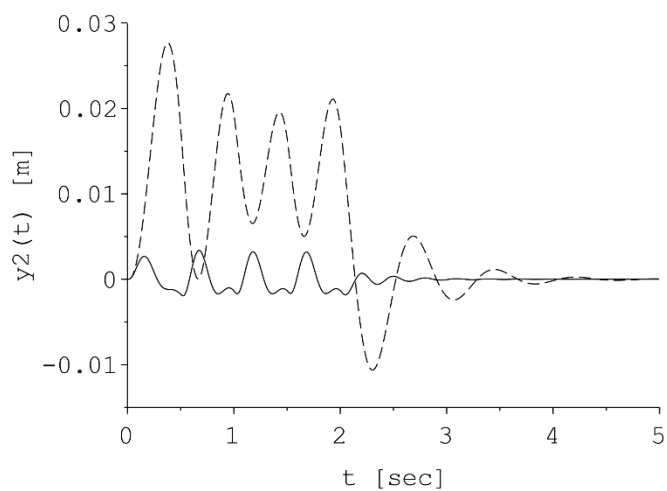
Hangolást követően az eredményeket a 6. ábra szemlélteti, míg a 7. ábra bemutatja, hogy az idő függvényében az aktuátornak a beavatkozáshoz mekkora erő kifejtésre van szüksége. A 6. ábrán szaggatott vonalakkal ábrázolt görbe a szabályozás nélküli-, míg a folytonos görbe a behangolt PID szabályozóval működő esetet mutatja.



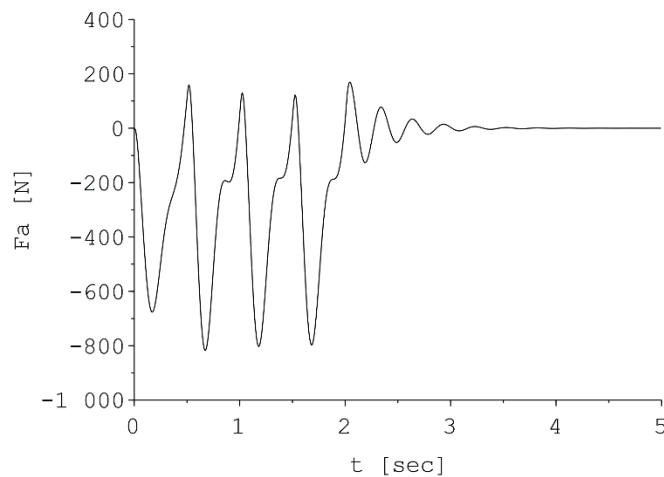
4. ábra: Az útgerjesztés az idő függvényében



5. ábra: A 2 jelű tömeg elmozdulása szabályozás nélkül és a stabilitás határán



6. ábra: A 2 jelű tömeg elmozdulása szabályozás nélkül és szabályozással



7. ábra: Az aktuátor szükséges erőkifejtése

Összefoglalás

A cikk egy mechanikai rezgőrendszer példáján keresztül bemutatta a kevésbé ismert, duális megközelítés alkalmazásával történő matematikai modell felállítását. A feladat során mind általánosított elmozdulás-, mind általánosított impulzus koordinátákra megtörtént a csatolt differenciálegyenletek levezetése, majd az állapotváltozós alak felírása. Az $u(t)$ elmozdulás gerjesztés hatására történő 2 jelű tömeg elmozdulásának csökkentése érdekében PID szabályozó illesztése valósult meg Scilab szoftverben, melynek hangolása a Ziegler-Nichols módszerrel történt meg. Az ilyesfajta felírásmód egyik előnye az, hogy a rendszer kimeneten egyből megkaphatók az erők, amelyek mérése egy valós rendszerben egyszerűbben kivitelezhető, mint az elmozdulásoké.

Hivatkozások

- [1] B. M. Csizmadia, E. Nándori, "Mechanika Mérnököknek – Modellalkotás –", Nemzeti tankönyvkiadó, Budapest, ISBN 963 19 4525, 2003
- [2] P. E. Wellstead, "Introduction to Physical System Modelling", Academic Press Ltd., London, ISBN 0-12-744380-0, 1979
- [3] A. Preumont, "Mechatronics – Dynamics of Electromechanical and Piezoelectric Systems –", Springer, ISBN-13 978-1-4020-4695, 2006
- [4] J. Bokor, P. Gáspár, "Írányítástechnika járműdinamikai alkalmazásokkal", Typotex kiadó, Budapest, 2018.
- [5] L. Rónai, "Investigation of the Vibrational Behavior of a Quarter-Car Model", *Lecture Notes in Mechanical Engineering, Vehicle and Automotive Engineering* 4, 2022, pp. 824-834, DOI: 10.1007/978-3-031-15211-5_68
- [6] S. D. Cohen, A. C. Hindmarsh, "CVODE, a Stiff/Nontiff ODE Solver in C", *Computers in Physics*, vol. 10, no. 2., 1996, pp. 138-143, DOI: 10.1063/1.4822377

- [7] A. S. McCormack, K. R. Godfrey, "Rule-Based Autotuning Based on Frequency Domain Identification", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 6, no. 1, 1998, DOI: 10.1109/87.654876



© 2024 by the authors. Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).